

**Zweifache Stichprobenprüfpläne für qualitative und
quantitative Merkmale mit minimaler maximaler ASN**

Dissertation

**zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors
der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des
Fachbereiches Wirtschafts- und
Organisationswissenschaften der Universität der
Bundeswehr Hamburg.**

vorgelegt von

Kai Müller

aus Hildesheim

Hamburg 1998

20030108 071

AQ F03-02-0419

REPORT DOCUMENTATION PAGE

Form Approved OMB No. 0704-0188

Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.

1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)	2. REPORT DATE 1998	3. REPORT TYPE AND DATES COVERED Dissertation	
4. TITLE AND SUBTITLE Zweifache Stichprobenpruefplaene fuer qualitative und quantitative Merkmale mit minimaler maximaler ASN Double Sample Plans for Qualitative and Quantitative Features with Minimal Maximal Average Sample Number (ASN)		5. FUNDING NUMBERS	
6. AUTHOR(S) Kai Mueller			
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES) Fachbereich Wirtschafts- und Organisationswissenschaften, Universitaet der Bundeswehr Hamburg		8. PERFORMING ORGANIZATION Report Number REPORT NUMBER	
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES)		10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER	
11. SUPPLEMENTARY NOTES Text in German. Title and abstract in German and English, 65 pages.			
12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT Distribution A: Public Release.		12b. DISTRIBUTION CODE	
ABSTRACT (Maximum 200 words) The dissertation involves statistical efficiency and control. After a brief preface, the second chapter introduces the notions of the single and double sample plans for attributives, then follows with the determination of double sample plans for attributives with minimal maximal Average Sampler Number (ASN) in chapter three. Chapter four features single and double variable sample plans and, as expected, chapter five provides the determination of these plans with minimal maximal ASN. The end result responds to a concern as regards the QS, or quality control, that is used in general statistics, the goal in business being the more improved coordination of production control and acceptance sampling.			
14. SUBJECT TERMS German, UNIBW, Average Sample Number (ASN), Acceptance sampling, Production control, Quality control, Single and double sample plans		15. NUMBER OF PAGES	
		16. PRICE CODE	
17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT UNCLASSIFIED	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE UNCLASSIFIED	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT UNCLASSIFIED	20. LIMITATION OF ABSTRACT UNLIMITED

Referent : Prof. Dr. W. Krumbholz

Koreferent : Prof. Dr. W. Seidel

Tag der mündlichen Prüfung : 19. Februar 1998

Inhaltsverzeichnis :

1. Einleitung	Seite 1
2. Ein- und zweifache Attributprüfpläne	Seite 12
2.1 Einfache Attributprüfpläne	Seite 12
2.2 Zweifache Attributprüfpläne	Seite 17
3. Die Bestimmung zweifacher Attributprüfpläne mit minimaler maximaler ASN	Seite 22
3.1 Theoretische Grundlagen	Seite 22
3.2 Der Algorithmus zur Bestimmung des ASN-Planes	Seite 34
3.3 Auswirkung von Restriktionen auf die ASN	Seite 39
4. Ein- und zweifache Variablenprüfpläne	Seite 42
4.1 Einfache Variablenprüfpläne	Seite 42
4.2 Zweifache Variablenprüfpläne	Seite 44
5. Die Bestimmung zweifacher Variablenprüfpläne mit minimaler maximaler ASN	Seite 48
5.1 Theoretische Grundlagen	Seite 48
5.2 Der Algorithmus zur Bestimmung von δ^*	Seite 52
5.3 Die ASN-Pläne δ^* im Vergleich mit Plänen aus Schilling	Seite 59
Literaturverzeichnis	Seite 62

Kapitel 1 : Einleitung

Gemäß DIN 55350 versteht man unter Qualitätssicherung (Qualitätssicherung im weiteren Sinne = QS i.w.S.) die Gesamtheit der Tätigkeiten zum Erreichen der Qualität von Produkten. Zu den Teilfunktionen der Qualitätssicherung gehören die Qualitätsplanung, die Qualitätssteuerung (auch Qualitätslenkung oder Qualitätsregelung), und die Qualitätskontrolle (auch Qualitätsprüfung)¹.

Die Qualitätssicherung berührt in ihren Auswirkungen die meisten betrieblichen Funktionsbereiche; von der Beschaffung über die Produktion bis hin zur Finanzierung und Organisation. Sie schließt technische, wirtschaftliche, mathematisch-statistische und - bedingt durch die Produkthaftung - juristische Aspekte ein.²

Die QS i.w.S. wird daher von manchen Unternehmen als eigenständige Funktion gesehen. Dieses dokumentiert sich dadurch, daß

- 1) die Qualitätssicherung im Organisationsplan von Unternehmen als eigener Vorstands- oder Geschäftsbereich auftaucht oder der Unternehmensleitung direkt unterstellt ist³.
- 2) bei Qualitätsunternehmen das Top-Management deutlich stärker in die Entwicklung und die Umsetzung einer Qualitätsstrategie integriert ist⁴.

¹ Vgl. Verband der Automobilindustrie e.V. (VDA) ; Produktaudit bei Automobilherstellern und Zulieferanten ; Seite 11.

Vgl. auch Begriffe im Bereich der Qualitätssicherung ; DGQ-Schrift Nr.11-04 ; Seite 20.

² Rinne/Mittag ; Statistische Methoden der Qualitätssicherung ; Seite 10.

³ Rinne/Mittag ; Statistische Methoden der Qualitätssicherung ; Seite 10.

Vgl. auch Welti ; Inspektion und Qualitätskontrolle ; Seite 11.

⁴ Vgl. McKinsey&Company,Inc. 1995 ; Qualität gewinnt : Mit Hochleistungskultur und Kundennutzen an die Weltspitze ; Seite 41f.

In der Qualitätsplanung erfolgt die Auswahl und Festlegung von Qualitätsmerkmalen für ein bestimmtes Produkt oder Verfahren⁵. Zur Qualitätsplanung gehört auch die Festlegung der anzuwendenden Produktionsverfahren (Prozeßdesign)⁶.

Die Wahl der Produktionsverfahren beeinflusst die Produktionskosten, die Toleranzbereiche für ein Qualitätsmerkmal und die Möglichkeiten für die Messung der Qualitätsmerkmale.

Bestimmte Normen, Vorschriften und Richtlinien sind bei der Planung zu berücksichtigen.

Die Qualitätssteuerung plant, überwacht und korrigiert die Ausführung eines Produkts oder einer Tätigkeit. Sie schließt sich an die Qualitätsplanung an und baut auf den Resultaten der Qualitätsprüfung auf⁷.

Die Qualitätskontrolle (Qualitätskontrolle im engeren Sinne = QS i.e.S.) beinhaltet einen Soll-Ist-Vergleich, bei dem festgestellt wird, inwieweit Produkte die an sie gestellten Qualitätsanforderungen erfüllen.

Die Qualitätskontrolle kann nach dem Umfang der durchzuführenden Kontrollmaßnahmen in eine Totalkontrolle oder eine Partialkontrolle (Stichprobenkontrolle) unterschieden werden. Durch die Partialkontrolle wird versucht, mit Hilfe statistischer Methoden entweder Aussagen über den Zustand des Produktionsprozesses zu machen (statistische Prozeßkontrolle oder Fertigungsüberwachung ; statistical process control : SPC) oder Informationen über den Ausschußanteil eines gefertigten Loses zu erhalten (Annahmekontrolle oder Abnahmekontrolle ; acceptance sampling)⁸. Werden in diesem Rahmen Stichproben benutzt und mit Verfahren der mathematischen

⁵ Vgl. Masing ; Handbuch der Qualitätssicherung ; Seite 33.

⁶ Rinne/Mittag ; Statistische Methoden der Qualitätssicherung ; Seite 11.

⁷ Vgl. Bauer ; Qualitätskontrolle in der Fertigungsindustrie mit Hilfe von EDV-Anlagen ; Seite 10.

⁸ Vgl. J.M. Juran ; Quality Planning and Analysis ; Seite 335.

Statistik Schlußfolgerungen auf den gesamten Fertigungsprozeß gezogen, so spricht man von statistischer Qualitätssicherung oder statistischer Qualitätskontrolle, abkürzend: SQK (statistical quality control)⁹.

Während bei der Abnahmeprüfung Stichprobenprüfpläne verwendet werden, kommen bei der Produktionskontrolle hauptsächlich Kontrollkarten (auch Qualitätsregelkarten oder Regelkarten) zur Anwendung. Eine Verbindung zwischen Produktionskontrolle und Annahmeprüfung stellt die kontinuierliche Stichprobenprüfung dar.

Primärziel der QS i.e.S. ist es, bekannte und unbekannte, bewußt oder unbewußt begangene Fehler rücksichtslos aufzudecken bzw. hervorragende Produktionsqualitäten zu bestätigen. Ausgehend vom Grundsatz, daß Qualität hineinfabriert und nicht erkontrolliert werden darf/kann, muß zielbewußte Qualitätskontrolle eine enge Kooperation von Produktion und Kontrolle, sowie die eindeutige Festlegung von Verantwortlichkeiten beinhalten.

Darüber hinaus sollte eine Kontrolle grundsätzlich an der Quelle ausgeübt werden, also an einer Stelle, wo die Fehler gemacht werden¹⁰. Ist die Kontrolle an der Quelle nicht möglich, z.B. beim Fremdbezug von Einbauteilen, so ist eine Überprüfung der Zuliefererteile sofort nach Erhalt der Warenlieferung anzustreben. Dementsprechend wird die SQK in Abhängigkeit vom Prüfungszeitpunkt in eine Fertigungs- oder Prozeßüberwachung¹¹ und eine Annahme- oder Abnahmeprüfung klassifiziert. Das technische Hilfsmittel der Fertigungskontrolle ist die Kontrollkarte, mit deren Hilfe die Regelung oder Steuerung des Produktionsprozesses angestrebt wird. Voraussetzung für die Anwendung der Kontrollkartentechnik ist, daß

⁹ Die Verknüpfung von betriebswirtschaftlichen und statistischen Methoden zur SQK findet sich erstmals bei Shewhart 1931.

¹⁰ Vgl. Schaafsma ; Moderne Qualitätskontrolle ; Seite 4.

¹¹ Auch statistische Prozeßkontrolle (statistical process control).

während des Arbeitsprozesses die Prüfung vorgenommen werden kann.

Prüfpläne werden in Abhängigkeit vom Anwendungsgebiet und von der Art der Erfassung der Untersuchungsmerkmale in Attributprüfpläne und Variablenprüfpläne unterschieden. Wenn die zu prüfenden Einheiten qualitativ nach den Eigenschaften „fehlerfrei“ („gut“) oder „defekt“ („schlecht“) beurteilt und nur der Anteil fehlerhafter Einheiten oder die Anzahl der Fehler verwendet werden, dann handelt es sich um eine Attributprüfung, auch Gut-Schlecht-Prüfung¹² genannt. Bei der Variablenprüfung wird die Qualität des Prüflings mit einem quantitativen, meßbaren Merkmal¹³ unter Ausnutzung der Meßwerte eingeschätzt. Stichprobenverfahren für die Attributprüfung können natürlich auch auf ein meßbares Merkmal angewandt werden, jedoch wird in diesem Fall nur darauf geachtet, ob der Meßwert innerhalb oder außerhalb vorgegebener Grenzen liegt. In das Prüfverfahren gehen somit nur die Indikatorvariablen

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i\text{-ter Prüfling Ausschuß} \\ 0 & , \text{ falls } i\text{-ter Prüfling brauchbar} \end{cases}$$

ein.

Die Attributprüfung wird auch als „Gut-Schlecht-Prüfung“, „zählende Prüfung“ oder „homograde Stichprobenprüfung“, die Variablenprüfung als „messende Prüfung“ oder „heterograde Stichprobenprüfung“ bezeichnet. Die Stichprobenlänge ist bei der messenden Prüfung häufig viel kleiner.

Attributprüfpläne (qualitative Prüfpläne) weisen größere Stichproben auf, die Prüfmethoden sind jedoch einfacher. Oftmals genügt eine Sichtprüfung, um den Zustand des Prüflings (zufriedenstellend oder nicht) zu bestimmen.

¹² Vgl. Vogt ; Methoden der Statistischen Qualitätskontrolle ; Seite 65.

¹³ Zum Begriff des Merkmals vgl. Müller-Rossow ; DIN 55350 ; Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik ; QZ 21 (1976) ; Heft 5 ; Seiten 111 - 113.

Bei der Prüfung verchromter Gegenstände wäre es äußerst unpraktisch, den Glanz des Chromspiegels zahlenmäßig messen zu wollen. Eine „Gut/Schlecht“- Prüfung ist hier vorteilhaft. Andererseits ist das Prüfverfahren bei der Bestimmung von Längung und Streckgrenze von Stahlgußteilen so schwierig, kostenintensiv und zeitraubend, daß man die Stichproben möglichst klein halten wird.¹⁴ Eine Entscheidung für einen Variablenprüfplan ist in diesem Fall angebracht.

Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit sind die Attribut- und Variablenprüfpläne der Annahmekontrolle.

Durch die Annahmekontrolle (auch Abnahmekontrolle) wird überprüft, ob ein produziertes Los von Vor-, Zwischen- oder Endprodukten einem geforderten Qualitätsstandard, ausgedrückt durch einen Ausschußanteil, entspricht. Die Annahmekontrolle kann als Eingangs-, Zwischen- und als Endkontrolle durchgeführt werden. Die Verfahren der Annahmekontrolle haben im Gegensatz zu denen der Prozeßkontrolle keinen unmittelbaren Einfluß auf die Produktion. Das statistische Instrument der Abnahmekontrolle ist der Stichprobenprüf- oder Prüfplan, welcher Anweisungen zur Annahme oder Ablehnung eines Loses enthält¹⁵.

Ein Prüfplan enthält Angaben über die Anzahl zu prüfender Einheiten sowie darüber, bis zu welcher Anzahl beanstandeter Einheiten ein Los akzeptiert werden kann.

DIN 55350 definiert : „Eine Menge eines Produktes, die unter Bedingungen entstanden ist, die als einheitlich angesehen wird.“ als Los (lot) bzw. Posten. Ein Prüflot bezeichnet ein Los, das einer Qualitätsprüfung unterzogen werden soll.

¹⁴ Norbert L. Enrick ; Qualitätskontrolle im Industriebetrieb , Methoden und Anwendungen ; Seite 55.

¹⁵ Vgl. W. Uhlmann ; Statistische Qualitätskontrolle ; Seite 95.

Wird ein Los bzw. die betrachtete Menge aufgrund der Prüfung ohne weitere Maßnahmen (Nacharbeit, Aussortierung, Vernichtung, Verschrottung oder Rücksendung an den Lieferanten) ihrem Zweck zugeführt, so bezeichnet man dies als Annahme der Partie. Jedes andere Verhalten wird als Ablehnung der Partie bezeichnet.¹⁶ Für die Verwendung von Prüfverfahren der statistischen Qualitätskontrolle ist nicht relevant, ob eine Ablehnung eine Rücklieferung (im Falle der Eingangskontrolle) oder eine Nacharbeit der Erzeugnisse (im Falle der Endkontrolle) zur Folge hat¹⁷.

Die Entscheidung über Annahme bzw. Ablehnung ist im allgemeinen mit Risiken verbunden. Eine irrtümliche Weiterverarbeitung fehlerhafter oder ein irrtümliches Verwerfen fehlerfreier Erzeugnisse führt meist zu Folgekosten. Die Annahme eines Loses minderwertiger Qualität kann u.a. Störungen im Produktionsablauf verursachen. Eine hierdurch hervorgerufene Produktionsunterbrechung würde zu erhöhten Fertigungskosten führen. Zum anderen würde eine Ablehnung eines Loses, dessen Qualität hervorragend ist, das Verhältnis zwischen Lieferanten und Abnehmer nachhaltig negativ beeinflussen. Die Wahrscheinlichkeit der Rücksendung einer einwandfreien Warenpartie an den Lieferanten muß somit gering gehalten werden. Ziel der Annahmekontrolle ist eine „gerechte“ Entscheidung über die Annahme oder Ablehnung einer Warenlieferung. Bei der Anwendung von Testverfahren können grundsätzlich zwei verschiedene Fehlentscheidungen auftreten :

- Ein Los, das eigentlich den Qualitätsanforderungen genügt, wird abgewiesen. Die Ablehnung eines ausreichend guten Loses wird als Fehler erster Art bezeichnet.
- Ein Los, das den Qualitätsanforderungen nicht genügt, wird angenommen. Eine solche Annahme eines schlechten Loses wird als Fehler zweiter Art bezeichnet.

¹⁶ Vgl. H. Vogt ; Methoden der statistischen Qualitätskontrolle ; Seite 65.

¹⁷ Vgl. von Collani ; Optimale Wareneingangskontrolle ; Vorwort.

Definition 1 : Sei δ ein beliebiger Prüfplan und $p \in [0, 1]$ der Ausschußanteil im Los.

Dann heißt $L_{\delta}(p) = L(p) := P_p(\text{Annahme des Loses bei Kontrolle mit } \delta)$ Operationscharakteristik (OC) von δ .

Für alle in dieser Arbeit behandelten Prüfpläne δ ist $L_{\delta}(\cdot)$ streng monoton fallend ($0 < p < 1$).

Die Operationscharakteristik (auch Annahmekennlinie, kurz : OC-Kurve) wird zur Charakterisierung von Stichprobenplänen herangezogen. Die OC-Kurve eines Prüfplanes liefert einen Langzeit-Erwartungswert für den Prozentsatz angenommener Lose in Abhängigkeit vom Niveau des Fehleranteils der Fertigung.

Vereinbarung 1 : Lose mit einem Ausschußanteil $p \leq p_1$ gelten als einwandfrei. p_1 heißt annehmbare Qualitätslage¹⁸.

Vereinbarung 2: Lose mit einem Ausschußanteil $p \geq p_2$ gelten als nicht einwandfrei. p_2 heißt rückzuweisende Qualitätslage¹⁹.

Gemäß diesen Vereinbarungen ist nun der Fehler erster Art die Rückweisung eines Loses mit $p \leq p_1$, der Fehler zweiter Art die Annahme eines Loses mit $p \geq p_2$. Das zu ermittelnde Prüfverfahren δ soll sowohl den Produzenten als auch den Abnehmer schützen. Deshalb werden Schranken α und β mit

$$(1) \quad P(\text{Fehler erster Art}) \leq \alpha,$$

$$(2) \quad P(\text{Fehler zweiter Art}) \leq \beta$$

vorgegeben.

¹⁸ Die annehmbare Qualitätslage wird auch als AQL (Accept Quality Level) bzw. Gutgrenze bezeichnet.

¹⁹ Die rückzuweisende Qualitätslage wird auch als LQ (Limiting Quality), LTPD (Lot Tolerance Percent Defective) bzw. Schlechtgrenze bezeichnet.

Unter Verwendung der Operationscharakteristik L_δ und deren oben erwähnter Monotonie sind (1) , (2) äquivalent zu

$$(1a) \quad L_\delta (p_1) \geq 1 - \alpha ,$$

$$(2a) \quad L_\delta (p_2) \leq \beta .$$

Hierbei vereinbaren wir $0 < \beta < 1 - \alpha < 1$ und $0 < p_1 < p_2 < 1$.

Üblicherweise werden die Parameter p_1 , p_2 , α , β einvernehmlich von Produzent und Abnehmer festgelegt.

Definition 2 : Prüfpläne δ mit (1a) , (2a) werden als zugelassen bezeichnet.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit ein- und zweistufigen Prüfplänen. Bei einfachen Prüfplänen ist der Prüfumfang konstant. Bei zweifachen Prüfplänen kann die Entscheidung über Annahme oder Ablehnung des Loses bereits nach einer ersten Stichprobe erfolgen oder erst nach einer zweiten. Deshalb ist der insgesamt erforderliche Prüfumfang eine Zufallsvariable, die vom Ausschußanteil p abhängt. Durch (1a) , (2a) sind weder ein- noch zweifache Prüfpläne eindeutig festgelegt.

Sei E die Menge aller zugelassenen einfachen Attribut- bzw.

Variablenprüfpläne. Für $\delta \in E$ sei n_δ der Prüfumfang von δ . Dann wird zur Vermeidung unnötiger Prüfkosten derjenige Plan δ^* aus E gewählt, für den gilt

$$(3) \quad n_{\delta^*} = \min_{\delta \in E} n_\delta .$$

Vereinbarung 3 : Der einfache Prüfplan δ^* zu (1a) , (2a) , (3) heißt zu p_1 , p_2 , α und β gehörender Plan.

In Abschnitt 2.1 werden einfache Attributprüfpläne und in Abschnitt 4.1 einfache Variablenprüfpläne für $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilte Merkmale mit bekanntem σ und unterer Toleranzgrenze T_u behandelt.

Aus ökonomischen Gründen sind solche Prüfpläne interessant, die zugelassen sind und im Mittel Prüfkosten gegenüber den betrachteten einfachen Plänen einsparen. Eine Möglichkeit, solche Einsparungen zu erzielen, bietet die Ausnutzung von vollständigen bzw. unvollständigen Vorinformationen²⁰. Eine andere Möglichkeit bieten sogenannte zweifache, mehrstufige oder sequentielle Prüfpläne. Bei solchen Prüfplänen δ ist der insgesamt benötigte Prüfumfang bis zur endgültigen Entscheidung über Annahme oder Ablehnung des Loses eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert $N_\delta(p) = N(p)$ auch als **ASN (average sample number)** bezeichnet wird. Dabei sei

$$N_{\max}(\delta) := \max_{0 \leq p \leq 1} N_\delta(p).$$

Wir befassen uns insbesondere mit zweifachen Attribut- und Variablenprüfplänen. Sei Z die Menge aller zugelassenen zweifachen Attribut- bzw. Variablenprüfpläne. In den folgenden Kapiteln werden sowohl für den zweifachen Attributprüfplan wie auch für den zweifachen Variablenprüfplan Verfahren entwickelt, die es gestatten denjenigen Plan $\delta^* \in Z$ zu bestimmen, der (1a) und (2a) erfüllt, d.h. zugelassen ist, und

$$(4) \quad N_{\max}(\delta^*) = \min_{\delta \in Z} N_{\max}(\delta)$$

erfüllt.

Solche Pläne werden als **ASN-Pläne** bezeichnet. Die Abschnitte 2.2 bzw. 4.2 beschäftigen sich mit ASN-Plänen der zweifachen Attribut-

²⁰ Vgl. Krumbholz, W. / Pflaumer, P. ; Möglichkeiten der Kosteneinsparung bei der Qualitätskontrolle durch Berücksichtigung von unvollständigen Vorinformationen ; in : Zeitschrift für Betriebswirtschaft ; 52. Jg. ; 1982 ; Heft 11/12 ; Seiten 1088 - 1102.

bzw. Variablenprüfung. In den Kapiteln 3 bzw. 5 werden Algorithmen zur Bestimmung der ASN-Pläne für den Fall der Attribut- bzw. Variablenprüfung vorgestellt. Diese Pläne weisen einen maximalen mittleren Prüfumfang auf, der bis zu 32 % unterhalb des Stichprobenumfanges des entsprechenden einfachen Planes liegt. Bei beiden Algorithmen wird auf jegliche Restriktion zwischen den Parametern der Pläne, wie z.B. die Festlegung von konstanten Verhältnissen zwischen den Stichprobenumfängen und den Annahmekennzahlen, verzichtet. Dieser Verzicht impliziert zum einen einen weit größeren Rechenaufwand bei der Bestimmung von zweifachen Stichprobenplänen ; zum anderen weisen die ermittelten ASN-Pläne jedoch durchschnittliche Stichprobenumfänge auf, die unterhalb solcher Verfahren liegen, bei denen Restriktionen zwischen den Parametern der Pläne vorgenommen werden.

Gegenstand dieser Arbeit sind darüber hinaus Vergleiche mit bestehenden Prüfplansammlungen. In diesen Prüfplansammlungen werden durchweg zur Vereinfachung und Vereinheitlichung feste Verhältnisse zwischen den Stichprobenumfängen bzw. den Annahmekennzahlen vereinbart. Diese Vorgabe von festen Verhältnissen führte stets zu erhöhten durchschnittlichen Stichprobenumfängen; teilweise sogar zu durchschnittlichen Stichprobenumfängen oberhalb der Stichprobenumfänge der OC-äquivalenten Einfachpläne. Unter solchen Umständen ist die Verwendung von zweifachen Stichprobenplänen unzweckmäßig. Der in Kapitel 3.2 vorgestellte Algorithmus reduziert die maximale ASN sowohl gegenüber den oben erwähnten Prüfplansammlungen als auch gegenüber den OC-äquivalenten Einfachstichprobenplänen beträchtlich. Die mit Hilfe des in Kapitel 3.2 beschriebenen Algorithmus durchgeführten Berechnungen sind Gegenstand des Kapitels 3.3 und verdeutlichen die erzielbaren durchschnittlichen Stichprobeneinsparungspotentiale. In den Kapiteln 4 und 5 wird gezeigt, daß sich auch im Bereich der Variablenprüfung erhebliche Stichprobeneinsparungen durch den

Verzicht auf Restriktionen zwischen den fünf einen zweifachen Variablenprüfplan charakterisierenden Parametern realisieren lassen. Zunächst werden in Kapitel 4 und 5.1 die Grundlagen der einfachen und zweifachen Variablenprüfung vermittelt, bevor in Kapitel 5.2 erneut ein Algorithmus vorgestellt wird. Mit diesem können zweifache Variablenprüfpläne berechnet werden, deren maximale ASN wieder minimiert wird. Ein Vergleich ermittelter Resultate mit vorhandenen Stichprobenplänen erfolgt in Kapitel 5.3.

Beide Algorithmen wurden in ein entsprechendes C++ Programm umgesetzt. Mit diesen Programmen wurden die in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse ermittelt. Für über 1000 Parameterkonstellationen von p_1 , p_2 , α und β wurden die entsprechenden zweifachen Stichprobenpläne auch schon vertafelt und brauchen somit nicht erneut berechnet zu werden.

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Herrn Prof. Dr. Wolf Krumbholz für die vielfältigen Anregungen und die intensive fachliche Betreuung bedanken. Ohne diese Ratschläge und Unterstützung wäre die Arbeit niemals entstanden.

Darüber hinaus bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Wi. Ing. Rainer Lassahn für die geleistete Unterstützung.

Kapitel 2 : Ein- und zweifache Attributprüfpläne

2.1 : Einfache Attributprüfpläne

Einfache Prüfpläne bestehen aus nur zwei Parametern. Daher sind diese am einfachsten anwendbar.

Definition 3 : Der einfache Attributprüfplan (n, c) ist gegeben durch die Entscheidungsvorschrift :

- (i) Ziehe eine Stichprobe der Länge n und bestimme die Anzahl X fehlerhafter Exemplare in dieser Stichprobe.
- (ii) Falls $X \leq c$, Annahme des Loses.
Falls $X > c$, Ablehnung des Loses.

Zur Vermeidung trivialer Prüfpläne vereinbaren wir : $0 \leq c < n$.
Im Falle von $c < 0$ würde die Partie, unabhängig vom Stichprobenergebnis, stets abgelehnt und im Falle von $c \geq n$ stets angenommen. In beiden Fällen wäre die Entnahme und Kontrolle der Stichprobe unnötig. Sei N der Losumfang, M die Anzahl der fehlerhaften Einheiten im Los und $p = M / N$ der Ausschußanteil, d.h. der Anteil fehlerhafter Einheiten im Los. Für die OC von (n, c) ergibt sich :

$$L(p) = P_p(\text{Annahme}) = P_p(X \leq c)$$

$$= \begin{cases} \sum_{m=0}^c \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} , & \text{falls Stichprobe mit ZRL} \\ \sum_{m=0}^c \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} , & \text{falls Stichprobe ohne ZRL} \end{cases}$$

Stichproben mit ZRL sind in der Praxis ungebräuchlich. Daher werden im folgenden nur noch Stichproben ohne ZRL betrachtet. Für große Losumfänge kann auch im Falle der Entnahme ohne Zurücklegen näherungsweise (Binomialapproximation)

$$(5) \quad L(p) = \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gesetzt werden.

Ist überdies p klein, so läßt sich die OC wegen des Poissonschen Grenzwertsatzes gemäß

$$(6) \quad L(p) = \sum_{m=0}^c \frac{(n \cdot p)^m}{m!} \cdot e^{-n \cdot p}$$

berechnen (Poissonapproximation). Als Faustregel für die Verwendbarkeit der Näherungsformel (6) wird in der Literatur z.B. $n \geq 50$, $p \leq 0.1$ genannt²¹.

In dieser Arbeit wird meistens die Approximation (6) Verwendung finden. Die Ermittlung des Prüfplanes (n , c) auf der Grundlage der hypergeometrischen Verteilung hätte umfangreiche und schwierige Berechnungen zur Folge. Die Berechnungen lassen sich jedoch durch die Approximation erheblich reduzieren. Die ermittelten Resultate sind i.a. ausreichend²². Die Bestimmung des einfachen Attributprüfplanes (n , c) erfolgt derart, daß unter allen zugelassenen Prüfplänen gemäß (3) derjenige gewählt wird, dessen n minimal ist. Es ergeben sich nach (1a) und (2a) die folgenden Ungleichungen :

$$(7) \quad \sum_{m=0}^c \frac{(n \cdot p_1)^m}{m!} \cdot e^{-n \cdot p_1} \geq 1 - \alpha$$

und

$$(8) \quad \sum_{m=0}^c \frac{(n \cdot p_2)^m}{m!} \cdot e^{-n \cdot p_2} \leq \beta$$

²¹ Vgl. z.B. Uhlmann, W. ; Statistische Qualitätskontrolle. Seite 114.

²² Vgl. Krumbholz , W. / Pflaumer , P. ; Möglichkeiten der Kosteneinsparung bei der Qualitätskontrolle durch Berücksichtigung von unvollständigen Vorinformationen ; in : Zeitschrift für Betriebswirtschaft ; 52. Jg. ; 1982 ; Heft 11/12 ; Seiten 1088 - 1102.

Mit Hilfe von (7) und (8) kann der nachfolgende Algorithmus zur Berechnung von einfachen Attributprüfplänen δ^* entwickelt werden.

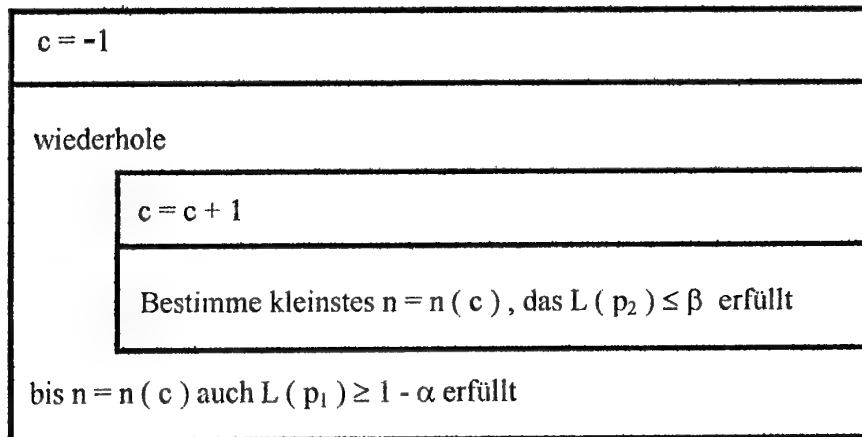


Abbildung 1 : Algorithmus zur Bestimmung einfacher Attributprüfpläne δ^*

Die mit Hilfe dieses Algorithmus ermittelten Größen n und c beschreiben den einfachen Attributprüfplan δ^* zu gegebenen Parametern p_1 , p_2 , α und β . Aufgrund einer bekannten Monotonieeigenschaft der Operationscharakteristik kann stets ein einfacher Attributprüfplan δ^* mit diesem Algorithmus berechnet werden²³. Darüber hinaus verdeutlicht dieser Algorithmus vorweg schon einmal das grundsätzliche Vorgehen bei der Ermittlung von zweifachen Attributprüfplänen²⁴. Beispiel 1 veranschaulicht noch einmal die Bestimmung von δ^* .

Beispiel 1 : $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.05$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.05$

1. Schritt : a) $c = 0$

b) Kleinstes $n = n(0)$, das $L(p_2) \leq \beta$ erfüllt, ist :

$$n = n(0) = 60$$

c) Probe in $L(p_1) \geq 1 - \alpha$ nicht erfüllt, da $e^{-0.01 \times n} < 1 - \alpha$

2. Schritt : a) $c = 1$

b) Kleinstes $n = n(1)$, das $L(p_2) \leq \beta$ erfüllt, ist :

$$n = n(1) = 94$$

c) Probe in $L(p_1) \geq 1 - \alpha$ wiederum nicht erfüllt.

²³ Vgl. z.B. Uhlmann, W. ; Statistische Qualitätskontrolle ; Seite 116.

²⁴ Vgl. Kapitel 3.2: Der Algorithmus zur Bestimmung des ASN-Planes.

3. Schritt : a) $c = 2$

b) Kleinstes $n = n(2a)$, das $L(p_2) \leq \beta$ erfüllt, ist :

$$n = n(2a) = 126$$

c) Probe in $L(p_1) \geq 1 - \alpha$ wiederum nicht erfüllt.

4. Schritt : a) $c = 3$

b) Kleinstes $n = n(3)$, das $L(p_2) \leq \beta$ erfüllt, ist :

$$n = n(3) = 156$$

c) Probe in $L(p_1) \geq 1 - \alpha$ erfüllt.

Somit ergibt sich $(n, c) = (156, 3)$.

Abbildung 2 zeigt die OC dieses Planes.

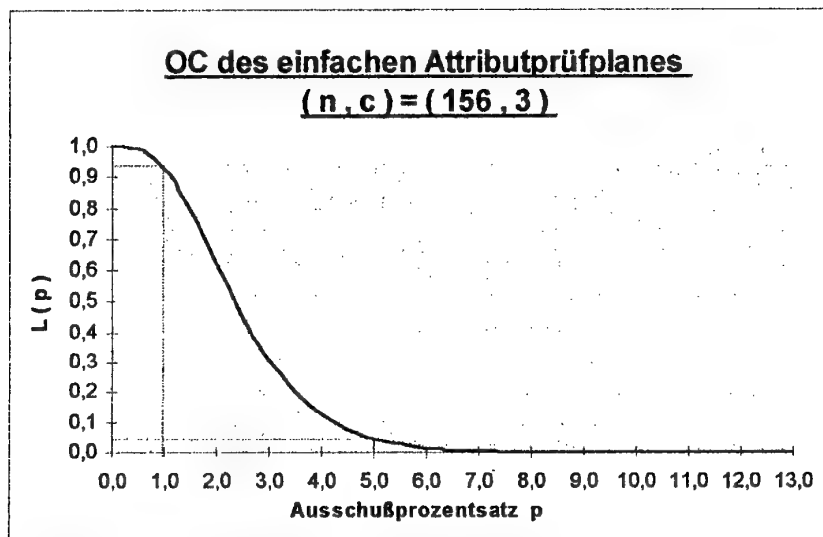


Abbildung 2 : OC des einfachen Attributprüfplans $(n, c) = (156, 3)$

1500 einfache Attributprüfpläne δ^* , die entsprechend diesem Beispiel bestimmt worden sind, sind vertafelt²⁵. Somit stehen für die in der Praxis geläufigsten Kombinationen aus p_1 , p_2 , α und β entsprechenden Stichprobenumfänge bzw. Annahmezahlen zur Verfügung.

²⁵ Vgl. Müller, Kai ; Diplomarbeit : „Zur Berechnung von zweifachen Attributprüfplänen mit minimalem mittleren Prüfumfang“ ; Universität der Bundeswehr Hamburg ; Band Ia, Band Ib und Band II.

Bemerkung 1: (i) Ein weiteres Verfahren zur Bestimmung von ein-

fachen Attributprüfplänen δ^* beruht auf einem Zusammenhang zwischen der Poissonverteilung und der Chi-Quadrat-Verteilung. Mit Hilfe dieses Verfahrens kann auch ohne Computerunterstützung der einfache Attributprüfplan δ^* schnell ermittelt werden. Für Programmierzwecke ist aber der in Abbildung 1 dargestellte Algorithmus geeigneter. Bezeichne G_f bzw. G_f^{-1} die Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung mit f Freiheitsgraden bzw. deren Inverse, wobei f Element der natürlichen Zahlen sei.

Sei D die Menge aller natürlichen Zahlen d , zu denen es zu gegebenen p_1, p_2, α, β mindestens eine natürliche Zahl m gibt mit

$$(9) \quad \frac{1}{2p_2} G_{2(d+1)}^{-1}(1-\beta) \leq m \leq \frac{1}{2p_1} G_{2(d+1)}^{-1}(\alpha),$$

und $n(d)$ das kleinste dieser m . Dann gilt für $d_1, d_2 \in D$ mit $d_1 < d_2$ auch $n(d_1) < n(d_2)$.

(ii) Der einfache Attributprüfplan (n, c) erfüllt²⁶

$$(10) \quad c = \min_{d \in D} d, \quad n = n(c).$$

Beispiel 2: $p_1 = 0.01, p_2 = 0.05, \alpha = 0.1, \beta = 0.05$

$$\text{Wegen } \frac{1}{0.1} G_6^{-1}(0.95) = 125.92 > \frac{1}{0.02} G_6^{-1}(0.1) = 110.20$$

und

$$\frac{1}{0.1} G_8^{-1}(0.95) = 155.07 < \frac{1}{0.02} G_8^{-1}(0.1) = 174.50$$

ist (9) für $2 \cdot (d+1) = 8$ erfüllt.

Somit erhält man $(n, c) = (156, 3)$.

Dies ist derselbe Plan wie in Beispiel 1.

2.2 : Zweifache Attributprüfpläne

Die ursprüngliche Idee der zweistufigen Prüfpläne ist, für besonders gute und besonders schlechte Partien schnell zu einer Entscheidung zu gelangen²⁷, um im Mittel Prüfumfang zu sparen.

Definition 4 : Ein zweifacher Attributprüfplan $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix}$

ist gegeben durch die Prüfvorschrift :

(i) Ziehe eine erste Stichprobe vom Umfang n_1 und bestimme die Anzahl X_1 fehlerhafter Exemplare in dieser Stichprobe.

Falls $X_1 \leq c_1$, nimm das Los an.

Falls $X_1 > c_2$, lehne das Los ab.

Falls $c_1 < X_1 \leq c_2$, gehe zu (ii).

(ii) Ziehe eine zweite Stichprobe vom Umfang n_2 und bestimme die Anzahl X_2 fehlerhafter Exemplare in dieser Stichprobe.

Falls $X_1 + X_2 \leq c_3$, nimm das Los an.

Falls $X_1 + X_2 > c_3$, lehne das Los ab.

Die fünf nicht-negativen ganzen Zahlen n_1 , n_2 , c_1 , c_2 und c_3 können zur Vermeidung trivialer Prüfpläne nicht beliebig gewählt werden²⁸.

Für zweifache Attributprüfpläne machen wir deshalb die folgenden Einschränkungen :

$$(11) \quad c_1 \leq c_2,$$

$$(12) \quad n_1 > c_1,$$

$$(13) \quad n_1 + n_2 > c_3.$$

²⁷ Vgl. Uhlmann ; Statistische Qualitätskontrolle ; Seite 146.

Vgl. auch Schaafsma / Willemze ; Moderne Qualitätskontrolle ; Seite 225.

²⁸ Vgl. Rinne / Mittag ; Statistische Methoden der Qualitätssicherung
Seite 207.

Die Operationscharakteristik (OC) von δ ist gegeben durch

$$(14) \quad L_{\delta}(p) = L(p) = P_p(X_1 \leq c_1) + \sum_{k=c_1+1}^{c_2} P(X_2 \leq c_3 - k | X_1 = k) \cdot P(X_1 = k).$$

Unmittelbar ersichtlich sind die Eigenschaften $L(0) = 1$ und $L(1) = 0$. Die strenge Monotonie für die OC ist wiederum gegeben. Einfachstichprobenpläne und Doppelstichprobenpläne mit exakt deckungsgleicher OC sind im allgemeinen nicht bestimmbar²⁹. Allenfalls können zweifache Pläne konstruiert werden, die in ausgewählten Punkten mit den OC-Werten der Einfachpläne übereinstimmen. Solche Pläne mit näherungsweise gleicher OC-Kurve heißen approximativ OC-äquivalente Prüfpläne. OC-äquivalente Prüfpläne weisen insbesondere die gleiche Trennschärfe auf³⁰. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird zu einem Einfachstichprobenplan der OC-äquivalente Doppelstichprobenplan auch als entsprechender Doppelstichprobenplan bezeichnet³¹. Im Gegensatz zum Einfachstichprobenplan ist der insgesamt benötigte Stichprobenumfang bei Doppelstichprobenplänen keine festgelegte Größe mehr, sondern hängt vielmehr vom Zufall ab. Für den Gesamtprüfumfang ist der Prüfausgang der ersten Stichprobe entscheidend³². Die Wahrscheinlichkeit, daß eine zweite Stichprobe vom Umfang n_2 benötigt wird, beträgt in Abhängigkeit vom Ausschußanteil p :

$$(15) \quad Q_{\delta}(p) = Q(p) = P_p(c_1 + 1 \leq X_1 \leq c_2).$$

Für den Erwartungswert des insgesamt benötigten Prüfumfanges (ASN) erhält man :

$$(16) \quad N_{\delta}(p) = N(p) = n_1 + n_2 \cdot Q_{\delta}(p).$$

Es ist sofort $n_1 \leq N(p) \leq n_1 + n_2$ ersichtlich.

²⁹ Ausnahme : $c_1 = c_2$. In diesem Fall stimmt der zweifache Plan $(n_1, n_2, c_1, c_2, c_3)$ mit dem einfachen Plan (n_1, c_1) überein.

³⁰ Vgl. Rinne / Mittag ; Methoden der statistischen Qualitätssicherung ; Seite 220ff.

³¹ Approximativ OC-äquivalente Prüfpläne sind z.B. die Pläne $(n, c) = (156, 3)$ und $(n_1, n_2, c_1, c_2, c_3) = (82, 76, 0, 2, 3)$.

³² Vgl. Schindowski / Schürz ; Statistische Qualitätskontrolle : Kontrollkarten und Stichprobenpläne ; Seite 239 ff.

Wie bei den einfachen Attributprüfplänen verwenden wir auch für die zweifachen Attributprüfpläne durchweg die klassische Poissonapproximation, die z.B. auch HAMAKER / VAN STRIK³³ benutzten. Mit

$$(17) \quad P(\lambda; c) := \sum_{k=0}^c \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0, c \in N_0)$$

verwenden wir durchweg die Näherungsformeln

$$(18) \quad L_{\delta}(p) = P(n_1 p; c_1) + \sum_{k=c_1+1}^{c_2} P(n_2 p; c_3 - k) \frac{(n_1 p)^k}{k!} e^{-n_1 p},$$

$$(19) \quad Q_{\delta}(p) = P(n_1 p; c_2) - P(n_1 p; c_1).$$

Gleichung (18) ist äquivalent zu :

$$(20) \quad L_{\delta}(p) = e^{-n_1 p} \cdot \sum_{m_1=0}^{c_1} \frac{(n_1 \cdot p)^{m_1}}{m_1!} + e^{-p(n_1+n_2)} \cdot \sum_{m_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{m_2=0}^{c_3-m_1} \frac{n_1^{m_1} \cdot n_2^{m_2}}{m_1! m_2!} \cdot p^{m_1+m_2}.$$

Unter Verwendung von (19) ergibt sich für die ASN aus (16)

$$(21) \quad N_{\delta}(p) = n_1 + n_2 \cdot \left\{ \sum_{m=c_1+1}^{c_2} \frac{(n_1 \cdot p)^m}{m!} \cdot e^{-n_1 p} \right\}.$$

Wir setzen noch

$$(22) \quad Q_{\max}(\delta) := \max_{0 \leq p \leq 1} Q_{\delta}(p),$$

$$(23) \quad N_{\max}(\delta) := \max_{0 \leq p \leq 1} N_{\delta}(p) = n_1 + n_2 Q_{\max}(\delta).$$

Ferner bezeichnen wir den Ort, an dem $N_{\delta}(\cdot)$ das Maximum annimmt, mit p_{\max} . Es seien eine Gutgrenze (AQL) p_1 , eine Schlechtgrenze (LQ) p_2 sowie Fehlerniveaus α, β ($0 < p_1 < p_2 < 1$; $0 < \beta < 1 - \alpha < 1$) vorgegeben. Gesucht werden solche zweifachen Attributprüfpläne δ , die die Bedingungen (1a), (2a) erfüllen, d.h. die gemäß Definition 2 zugelassen sind.

³³ Vgl. Hamaker, H. C. / van Strik, R. ; The Efficiency of Double Sampling for Attributes ; in : Journal of the American Statistical Association 50 ; Seiten 830 - 849.

Es ist naheliegend, neben (1a), (2a) noch zu fordern, daß die Pläne gewisse Prüfkosten minimieren sollen.

GUENTHER³⁴ betrachtete Pläne mit $c_2 = c_3$, die für beliebige

nicht-negative Gewichte a_1, a_2 mit $\sum_{i=1}^2 a_i = 1$

$$(24) \quad a_1 N(p_1) + a_2 N(p_2)$$

minimieren.

TAYLOR³⁵ betrachtete Pläne, bei denen n_1, n_2, c_1, c_2, c_3 keinen Restriktionen unterliegen. Er berichtet von einem Programm, das für ein beliebig festzulegendes p_0 und nicht-negative Gewichte a_0, a_1, a_2

mit $\sum_{i=0}^2 a_i = 1$ unter Binomialapproximation einen zugelassenen Plan

bestimmt, der

$$(25) \quad a_0 N(p_0) + a_1 N(p_1) + a_2 N(p_2)$$

minimiert. In Kapitel 3 dieser Arbeit wird noch einmal auf diese TAYLORSCHEN Pläne eingegangen.

In der vorliegenden Arbeit werden die betrachteten Pläne ebenfalls keinerlei Restriktionen unterworfen. Sei Z die Menge aller zugelassenen zweifachen Attributprüfpläne, die (11), (12), (13) erfüllen. Wir verwenden in dieser Arbeit anstelle von (25) das natürlicher erscheinende Kriterium der maximalen ASN. Es werden solche Pläne $\delta^* \in Z$ bestimmt, für die

$$(26) \quad N_{\max}(\delta^*) = \min_{\delta \in Z} N_{\max}(\delta)$$

gilt.

³⁴ Vgl. Guenther, W.C. ; A Procedure for Finding Double Sampling Plans for Attributes ; in : Journal of Quality Technology 2 ; Seiten 219-225.

³⁵ Vgl. Taylor, W.A. ; A Programm for Selecting Efficient Binomial Double Sampling Plans ; in : Journal of Quality Technology 18 ; Seiten 67-73.

Definition 5 : Zugelassene zweifache Attributprüfpläne, für die (26) gilt, heißen attributive **ASN-Pläne**.

Interpretiert man $N_\delta(\cdot)$ als Risikofunktion, dann lassen sich die ASN-Pläne als Minimaxpläne innerhalb der Menge Z aller zugelassenen Pläne auffassen.

Da wegen $c_1 \leq c_2$, die einfachen Pläne in Z enthalten sind, gilt stets $N_{\max}(\delta^*) \leq n$, wobei (n, c) der einfache Plan zu p_1, p_2, α und β ist.

Definition 6 : $1 - \frac{N_{\max}(\delta^*)}{n}$ heißt **minimale Stichprobensparnis** des zweifachen Attributprüfplanes δ^* gegenüber dem OC-äquivalenten einfachen Attributprüfplan.

Definition 7 : $1 - \frac{n_1}{n}$ heißt **maximale Stichprobensparnis** des zweifachen Attributprüfplanes δ^* gegenüber dem OC-äquivalenten einfachen Attributprüfplan.

Kapitel 3 : Die Bestimmung zweifacher Attribut- prüfpläne mit minimaler maximaler ASN

3.1 : Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt entwickeln wir einen Algorithmus zur Bestimmung des ASN-Planes δ^* . Zunächst zeigen wir, daß man sich bei der Bestimmung dieses Planes auf eine endliche Teilmenge $Z_1 \subset Z$ zugelassener Pläne beschränken kann. Dieses sichert zum einen die Existenz von ASN-Plänen, zum anderen wurde hierdurch die Entwicklung des Programmpakets DOPLAN ermöglicht. Zu beliebigen p_1, p_2, α, β berechnet DOPLAN

- den einfachen Attributprüfplan (n, c) ,
- den ASN-Plan δ^* sowie $N_{\max}(\delta^*)$ und den Ort $p_{\max}(\delta^*)$, an dem dieses Minimum angenommen wird.

Das folgende Lemma gibt eine einfache Formel für den Ort p_{\max} , an dem die ASN ihr Maximum annimmt.

Lemma 1: Sei $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix}$ ein zweifacher Attributprüfplan mit

$$c_1 < c_2, n_1 > c_1.$$

Dann gilt

$$(27a) \quad Q_{\max}(\delta) = Q_{\delta}(p_{\max})$$

mit

$$(27b) \quad p_{\max} = \frac{1}{n_1} \cdot \left(\frac{c_2!}{c_1!} \right)^{\frac{1}{c_2 - c_1}}.$$

Beweis : Differentiation von $Q(p)$ in (19) liefert³⁶

$$Q'(p) = n_1 e^{-n_1 p} \left[\frac{(n_1 p)^{c_1}}{c_1!} - \frac{(n_1 p)^{c_2}}{c_2!} \right]$$

Für $0 < p < 1$ gilt $Q'(p) = 0$ genau dann, wenn $p = p_{\max}$ gilt.

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Bemerkung 2: (19) und (27a, b) liefern für $c_1 < c_2$, $n_1 > c_1$:

$$Q_{\max} = P(\lambda; c_2) - P(\lambda; c_1)$$

$$\text{mit } \lambda = \left(\frac{c_2!}{c_1!} \right)^{\frac{1}{c_2 - c_1}}$$

Q_{\max} hängt also nicht von n_1 ab.

Lemma 2: Sei $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix}$ ein zweifacher Attributprüfplan

mit $c_1 < c_2$, $n_1 > c_1$.

Dann gilt

$$(28) \quad N_{\max}(\delta) \geq a \cdot n_2^{\frac{2}{3}}$$

mit

$$(29) \quad a = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{18}} \pi^{\frac{1}{3}} = 0.96882...$$

³⁶ Vgl. Krumbholz, Wolf / Müller, Kai ; Zweifache Attributprüfpläne mit minimaler maximaler ASN ; in : Discussion Papers in Statistics and Quantitative Economics ; Nr. 78 ; August 1997 ; Universität der Bundeswehr Hamburg.

Beweis : Seien $\delta_1 := \begin{pmatrix} c_1 + 1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix}$ und $\delta_2 := \begin{pmatrix} c_1 + 1 & c_1 & c_1 + 1 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix}$.

Da Q_{\max} in (27a) nicht von n_1 abhängt, gilt

$$Q_{\max}(\delta) = Q_{\max}(\delta_1)$$

und somit wegen $n_1 > c_1$

$$(30) \quad N_{\max}(\delta) = n_1 + n_2 Q_{\max}(\delta) \geq c_1 + 1 + n_2 Q_{\max}(\delta_1) = N_{\max}(\delta_1).$$

Für δ_1 , δ_2 beträgt der Prüfumfang der ersten Stufe $c_1 + 1$,

woraus $P(X_1 \leq c_1 + 1) = 1$ folgt. Somit gilt $Q_{\delta_1}(p) = Q_{\delta_2}(p)$,

woraus $Q_{\max}(\delta_1) = Q_{\max}(\delta_2)$ und somit

$$(31) \quad N_{\max}(\delta_1) = N_{\max}(\delta_2)$$

folgt. Zusammen mit Lemma 1 liefern (30), (31)

$$(32) \quad N_{\max}(\delta) \geq c_1 + 1 + n_2 \frac{(c_1 + 1)^{c_1 + 1}}{(c_1 + 1)!} e^{-(c_1 + 1)}.$$

Die Stirlingsche Formel liefert

$$(33) \quad (c_1 + 1)! \leq (c_1 + 1)^{c_1 + 1} e^{-(c_1 + 1)} \sqrt{2\pi(c_1 + 1)} \cdot e^{\frac{1}{12}},$$

woraus wegen (32) und (33)

$$(34a) \quad N_{\max}(\delta) \geq \varphi(c_1 + 1)$$

mit

$$(34b) \quad \varphi(x) := x + b \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad b := \frac{n_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{12}} \quad \text{folgt.}$$

Elementares Nachrechnen zeigt, daß $\varphi(\cdot)$ für positive Argumente das Minimum in $x = \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ annimmt. Dieses ergibt

$$N_{\max}(\delta) \geq \varphi\left(\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = n_2^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{18}} (2\pi)^{-\frac{1}{3}} \left[2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right] = a \cdot n_2^{\frac{2}{3}}.$$

Somit ist Lemma 2 bewiesen.

Zu gegebenen Eingangsparametern p_1, p_2, α, β sei (n, c) der zugehörige einfache Attributprüfplan.

Sei Z die Menge aller zugelassenen zweifachen Attributprüfpläne, deren Parameter $(11), (12), (13)$ erfüllen.

Lemma 3 : Sei $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} \in Z$.

(i) Wenn $n_1 > n$, dann gilt $N_{\max}(\delta) > n$.

(ii) Sei $d := \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.04864\dots$

Wenn $n_2 > d \cdot n^{\frac{3}{2}}$, dann gilt $N_{\max}(\delta) > n$.

Beweis : (i) Wenn $n_1 > n$, folgt aus (23)

$$N_{\max}(\delta) = n_1 + n_2 \cdot Q_{\max}(\delta) > n.$$

(ii) Wenn $n_2 > d \cdot n^{\frac{3}{2}}$, dann folgt aus Lemma 2

$$N_{\max}(\delta) > a \left[\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} = n.$$

Somit ist Lemma 3 bewiesen.

Bemerkung 3: Lemma 3 stellt sicher, daß nur eine endliche Menge von zugelassenen Plänen betrachtet zu werden braucht. Dieses sichert die Existenz von ASN-Plänen.

Die Schranke $n_2 < d \cdot n^{\frac{3}{2}}$ ist sehr grob. Sie basiert auf der groben unteren Schranke für N_{\max} in Lemma 2. Diese Schranke wurde unter sehr allgemeinen Voraussetzungen hergeleitet. Eine Verbesserung dieser Schranke ist sicher möglich, wenn über die Pläne δ weitere Voraussetzungen gemacht werden, wie z.B. diejenige, daß δ zugelassen ist. In der Tat erweist sich der Plan δ_2 aus dem Beweis von Lemma 2 für gängige Konstellationen von p_1, p_2, α, β für jede Wahl von n_2, c_3 als nicht zugelassen. Erfolgversprechend erscheint auch der Versuch, zu zeigen, daß man sich auf solche Pläne beschränken kann, die die Zentrierungsforderung

$$(35) \quad \frac{c_1 + \frac{1}{2}}{n_1} < \frac{c_3 + \frac{1}{2}}{n_1 + n_2} < \frac{c_2 + \frac{1}{2}}{n_1}$$

von HAMAKER / VAN STRIK³⁷ erfüllen.

Wir vermuten, daß der ASN-PLAN δ^* stets in einer Teilmenge $\tilde{Z} \subset Z$ liegt, in der für alle Pläne $n_2 \leq n$ gilt.

Lemma 4: Sei $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} \in Z$ mit $c_3 < c_2$.

Dann gilt $\delta_1 = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_3 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} \in Z$ und $N_{\max}(\delta_1) \leq N_{\max}(\delta)$.

³⁷ Vgl. Hamaker, H.C. / van Strik, R. (1955): The Efficiency of Double Sampling for Attributes. in : Journal of the American Statistical Association 50 ; Seiten 830-849.

Beweis : Wegen $c_3 < c_2$ gilt für beliebiges p

$$L_{\delta}(p) = P_p(X_1 \leq c_1) + P_p(c_1 + 1 \leq X_1 \leq c_2, X_1 + X_2 \leq c_3)$$

$$= P_p(X_1 \leq c_1) + P_p(c_1 + 1 \leq X_1 \leq c_3, X_1 + X_2 \leq c_3) = L_{\delta_1}(p).$$

Da δ_1 und δ dieselbe OC haben, ist δ_1 zugelassen. Ferner gilt wegen $c_3 < c_2$

$$\begin{aligned} N_{\max}(\delta_1) &= n_1 + n_2 \cdot P_p(c_1 + 1 \leq X_1 \leq c_3) \\ &\leq n_1 + n_2 \cdot P_p(c_1 + 1 \leq X_1 \leq c_2) = N_{\max}(\delta). \end{aligned}$$

Somit ist Lemma 4 bewiesen.

Lemma 5 : Sei $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} \in Z$ mit $n_1 \leq n$. Dann gilt $c_1 \leq c$.

Beweis : Es gilt bekanntlich³⁸ $P(\lambda; c) = 1 - G_{2(c+1)}(2\lambda)$, woraus folgt,

daß $P(\lambda; c)$ monoton fallend in λ ist.

Der einfache Plan (n, c) erfüllt die Bedingungen

$$(36a) \quad P(n \cdot p_1; c) \geq 1 - \alpha,$$

$$(36b) \quad P(n \cdot p_2; c) \leq \beta.$$

Angenommen, es sei $c_1 > c$. Hieraus ergibt sich wegen der Monotonie von $P(\lambda; c)$ in λ und $n_1 \leq n$ aus (36a)

$$(37) \quad P(n_1 \cdot p_1; c_1) \geq P(n \cdot p_1; c_1) \geq P(n \cdot p_1; c) \geq 1 - \alpha.$$

Der Plan δ ist zugelassen und erfüllt damit (2a).

³⁸ Vgl. z.B. Uhlmann, W. (1982); Statistische Qualitätskontrolle; Seite 116.

Dieses liefert wegen (18)

$$(38) \quad P(n_1, p_2; c_1) \leq L_\delta(p_2) \leq \beta.$$

Aus (37), (38) folgt, daß der einfache Plan (n_1 , c_1) zugelassen ist. Hieraus aber ergibt sich wegen $c_1 > c$, daß $n_1 > n$ gilt. Dieses steht im Widerspruch zur Voraussetzung $n_1 \leq n$.

Somit ist Lemma 5 bewiesen.

Bemerkung 4: Konsequenz der Lemmata 3 - 5 ist, daß es genügt, die

Menge $Z_1 \subset Z$ der zugelassenen Prüfpläne $\begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix}$ mit

$$(39a) \quad c_1 \leq c ,$$

$$(39b) \quad c_1 \leq c_2 \leq c_3 < n_1 + n_2 ,$$

$$(39c) \quad n_1 \leq n ,$$

$$(39d) \quad n_2 \leq 1.04864 \cdot n^{\frac{3}{2}}$$

zu betrachten. Z_1 ist endlich. Somit existiert mindestens ein Plan

$\delta^* \in Z_1$ mit $N_{\max}(\delta^*) = \min_{\delta \in Z_1} N_{\max}(\delta)$ und δ^* ist auch ASN-Plan.

Das Programmpaket DOPLAN (1.Version), gestattet zu beliebigen p_1 , p_2 , α , β die Bestimmung des ASN-Planes zu Z_1 und damit die Bestimmung des ASN-Planes δ^* . Das C++ Programm ist weitestgehend selbsterklärend und wurde auf zwei IBM-kompatiblen 486 DX 4/100 Rechnern, unter MS-DOS 6.22, entwickelt und getestet. Kompatibilitätsprobleme traten bislang auch auf anderen Computern nicht auf.

Mit Hilfe von DOPLAN wurde ein Tafelband erstellt. Im Anhang A dieses Tafelbandes sind zu über 1000 durchnummerierten Konstellationen von p_1 , p_2 , α , β die einfachen Attributprüfpläne (n , c) tabelliert. Im Anhang B des Tafelbandes sind unter derselben Nummer die entsprechenden zweifachen ASN-

Pläne δ^* tabelliert. Im Anhang C werden die einfachen und zweifachen Pläne verglichen. Es werden

- $N_{\max}(\delta^*)$ und $p_{\max}(\delta^*)$,
- die prozentuale Ersparnis $\left(1 - \frac{N_{\max}(\delta^*)}{n}\right) \cdot 100$ an maximaler ASN von δ^* gegenüber (n, c) ,
angegeben.

An dieser Stelle geben wir einige typische doppelte Attributprüfpläne³⁹ an. Diese Beispiele zeigen, daß mit dem doppelten Prüfplan im Durchschnitt eine beträchtliche Einsparung an Beobachtungen und damit an Prüfkosten erreicht wird.

Beispiel 3: $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.09$, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.08$

Nummer dieser Parameterkonstellation : Nr. 1173

$(n, c) = (63, 2)$

$$\begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & \end{pmatrix}$$

$$p_{\max} = 0.025, \quad N_{\max} = 42.58$$

Minimale Einsparung an maximaler ASN : 32.42 %

Maximale Einsparung an maximaler ASN : 36.51 %

Beispiel 4: $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.09$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.10$

Nummer dieser Parameterkonstellation : Nr. 1023

$(n, c) = (60, 2)$

$$\begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 1 \\ 29 & 2 & \end{pmatrix}$$

$$p_{\max} = 0.0312, \quad N_{\max} = 42.67$$

Minimale Einsparung an maximaler ASN : 28.89 %

Maximale Einsparung an maximaler ASN : 46.67 %

³⁹ Vgl. Müller, Kai ; Diplomarbeit : „Zur Berechnung von zweifachen Attributprüfplänen mit minimalem mittleren Prüfumfang“ ; Universität der Bundeswehr Hamburg ; Band II.

Beispiel 5 : $p_1 = 0.0025$, $p_2 = 0.01$, $\alpha = 0.03$, $\beta = 0.05$

Nummer dieser Parameterkonstellation : Nr. 657

$$(n, c) = (1315, 7)$$

$$\begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 745 & 2 & 5 \\ 604 & 7 & \end{pmatrix}$$

$$p_{\max} = 0.0053 \text{ , } N_{\max} = 1075.66$$

Minimale Einsparung an maximaler ASN : 18.20 %

Maximale Einsparung an maximaler ASN : 43.35 %

Bemerkung 5: (i) Die über 1000 berechneten zweifachen ASN-

Pläne haben folgende Eigenschaften :

1. Alle Pläne erfüllen

$$(40) \quad p_1 < p_{\max} < p_2 .$$

Dieses zeigt, daß das verwendete Kriterium der maximalen ASN nicht zu pessimistisch ist.

2. Alle Pläne erfüllen die Zentrierungsbedingung (35). Dieses stützt die Vermutung von HAMAKER / VAN STRIK⁴⁰, daß zweifache Pläne mit (35) effizienter sind als solche, die (35) nicht erfüllen.

3. Alle ASN-Pläne sind echte zweifache Pläne, d.h. es gilt

$$c_1 < c_2 \text{ und damit } N_{\max}(\delta^*) < n.$$

Ferner gilt in allen Fällen

$$(41) \quad c_2 \leq c \text{ und}$$

$$(42) \quad n_2 \leq n .$$

(ii) Die unter 2, 3 angeführten Erfahrungen legen es nahe, die Menge der betrachteten zulässigen Pläne noch einmal erheblich einzuschränken und statt der in der 1. Version von DOPLAN ver-

⁴⁰

Vgl. Hamaker, H.C. / van Strik, R. (1955): The Efficiency of Double Sampling for Attributes. in : Journal of the American Statistical Association 50 ; Seiten 830-849.

wendeten Menge Z_1 nur noch die Teilmenge $Z_2 \subset Z_1$ solcher zugelassener Pläne zu betrachten, für die

$$(43a) \quad c_1 < c_2 \leq c,$$

$$(43b) \quad n_1 \leq n, n_2 \leq n,$$

$$(43c) \quad c_2 \leq c_3 \leq c_2 \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1} + \frac{n_2}{2 \cdot n_1}$$

gilt.

Sei δ_i^* der Plan aus Z_i mit $N_{\max}(\delta_i^*) = \min_{\delta \in Z_i} N_{\max}(\delta)$ ($i = 1, 2$).

Die 2. Version von DOPLAN berechnet den Plan δ_2^* . Die Rechenzeit zur Bestimmung von δ_2^* liegt zum Teil erheblich unter der von δ_1^* . Für die Bedürfnisse der Praxis ist es unerheblich, daß der formale Beweis von $N_{\max}(\delta_2^*) = N_{\max}(\delta_1^*)$ noch nicht erbracht ist und auch ausgesprochen schwierig erscheint.

Bemerkung 6 : Für einfache Attributprüfpläne zu gegebenen $p_1, p_2, \alpha,$

β ist bekannt, daß die unter Poissonapproximation gerechneten Pläne (n, c) konservativ sind gegenüber solchen mit Binomialapproximation gerechneten Plänen (\tilde{n}, \tilde{c}) , d.h. daß stets $\tilde{L}(p_1) \geq L(p_1), \tilde{L}(p_2) \leq L(p_2)$ gilt, wobei \tilde{L} die OC von (n, c) unter Binomialapproximation ist, und somit $\tilde{c} \leq c, \tilde{n} \leq n$. Die entsprechende Eigenschaft scheinen auch die unter Poissonapproximation gerechneten ASN-Pläne δ^* zu haben. Für 30 ASN-Pläne verglichen wir $L(p_i)$ mit $\tilde{L}(p_i)$ ($i = 1, 2$), wobei \tilde{L} die OC von δ^* unter Binomialapproximation ist. In allen Beispielen galt $\tilde{L}(p_1) > L(p_1)$ und $\tilde{L}(p_2) < L(p_2)$.

Zahlenbeispiel : $p_1 = 0.01, p_2 = 0.05, \alpha = 0.05, \beta = 0.10$

$$L(p_1) = 0.950173$$

$$L(p_2) = 0.098947$$

$$\tilde{L}(p_1) = 0.950859$$

$$\tilde{L}(p_2) = 0.092428$$

Bemerkung 7: Wir haben berichtet, daß für den ASN-Plan δ^* und den einfachen Plan (n, c) , die beide unter Poissonapproximation bestimmt werden, stets $N_{\max}(\delta^*) < n$ gilt⁴¹. Seien $\tilde{\delta}$ und (\tilde{n}, \tilde{c}) wieder die entsprechenden Pläne unter Binomialapproximation. Dann kann man davon ausgehen, daß auch hier

$$(44) \quad N_{\max}(\tilde{\delta}) < \tilde{n}$$

gelten wird.

Das bereits erwähnte Programm von TAYLOR⁴² verwendet für

beliebige nicht-negative a_0, a_1, a_2 mit $\sum_{i=0}^2 a_i = 1$ und ein

beliebiges p_0 ($0 \leq p_0 \leq 1$) das Kriterium

$$(45) \quad T(\delta) = \sum_{i=0}^2 a_i \cdot N_{\delta}(p_i).$$

Zu gegebenen $p_1, p_2, \alpha, \beta, a_0, a_1, a_2, p_0$ bestimmt das Programm im ersten Schritt eine vollständige Klasse $Z_T \subset Z$ und danach unter Binomialapproximation den Plan δ_T mit

$$(46) \quad T(\delta_T) = \min_{\delta \in Z_T} T(\delta).$$

Hierbei reklamiert der von TAYLOR verwendete Begriff „complete class“, daß auch

$$(47) \quad T(\delta_T) = \min_{\delta \in Z} T(\delta)$$

gilt.

Andererseits berichtet TAYLOR, daß gelegentlich

$\delta_T = (\tilde{n}, \tilde{c})$ vorkommt. Wäre Z_T wirklich vollständig,

müßte auch $\tilde{\delta} \in Z_T$ gelten und somit wegen (44)

$$T(\tilde{\delta}) \leq N_{\max}(\tilde{\delta}) < \tilde{n}.$$

Dann aber könnte (47) für $\delta_T = (\tilde{n}, \tilde{c})$ nicht gelten.

⁴¹ Vgl. Kapitel 2 Seite 21.

⁴² Vgl. Taylor, W.A. ; A Programm for Selecting Efficient Binomial Double Sampling Plans ; in : Journal of Quality Technology 18 ; Seiten 67-73.

Bemerkung 8 : KANAGAWA / OHTA⁴³ schlugen ein Verfahren vor, mit

dem zu gegebenen p_1, p_2, α, β

- die kritischen Zahlen c_1, c_2, c_3 heuristisch festgelegt werden,
- anschließend n_1, n_2 so bestimmt werden, daß (1a), (2a)

möglichst knapp erfüllt werden.

In einem numerischen Beispiel betrachten sie $p_1 = 0.002$,
 $p_2 = 0.009, \alpha = 0.05, \beta = 0.10$.

Mit ihrer Methode berechnen sie zwei Pläne, nämlich

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 464 & 1 & 3 \\ 572 & 4 & \end{pmatrix} \text{ und } \delta_2 = \begin{pmatrix} 642 & 1 & 3 \\ 210 & 4 & \end{pmatrix}$$

$$\text{DOPLAN liefert den ASN-Plan } \delta^* = \begin{pmatrix} 517 & 1 & 3 \\ 418 & 4 & \end{pmatrix}$$

Zum Vergleich geben wir noch p_{\max} und N_{\max} für diese drei Pläne an.

	δ_1	δ_2	δ^*
N_{\max}	733.12	740.80	713.67
p_{\max}	0.0053	0.0038	0.0047

Tabelle 1 : Vergleich von δ^* mit Plänen von KANAGAWA / OHTA.

In diesem Fall liefert die heuristische Methode von KANAGAWA / OHTA dieselben kritischen Zahlen wie von δ^* . In anderen Beispielen ist dieses nicht der Fall. Dann liegen die KANAGAWA / OHTA-Pläne in der maximalen ASN zum Teil auch deutlicher über $N_{\max}(\delta^*)$ als in obigem Zahlenbeispiel.

⁴³ Vgl. Kanagawa, A. / Ohta, H. ; Determination of Sample Sizes for Double Sampling Attribute Plans ; Frontiers in Statistical Quality Control 5 ; (Eds.:Lenz, H.-J./Wilrich, P.-Th.) ; Physika ; Heidelberg.

3.2 : Der Algorithmus zur Bestimmung des ASN-Planes

In diesem Abschnitt wird der Algorithmus der 2. Version von DOPLAN in Struktogrammform dargestellt. Er ist der besseren Übersicht wegen in die Module A, B, C unterteilt worden. Darüber hinaus erfolgt eine Beschreibung der Eigenschaften der ASN-Pläne.

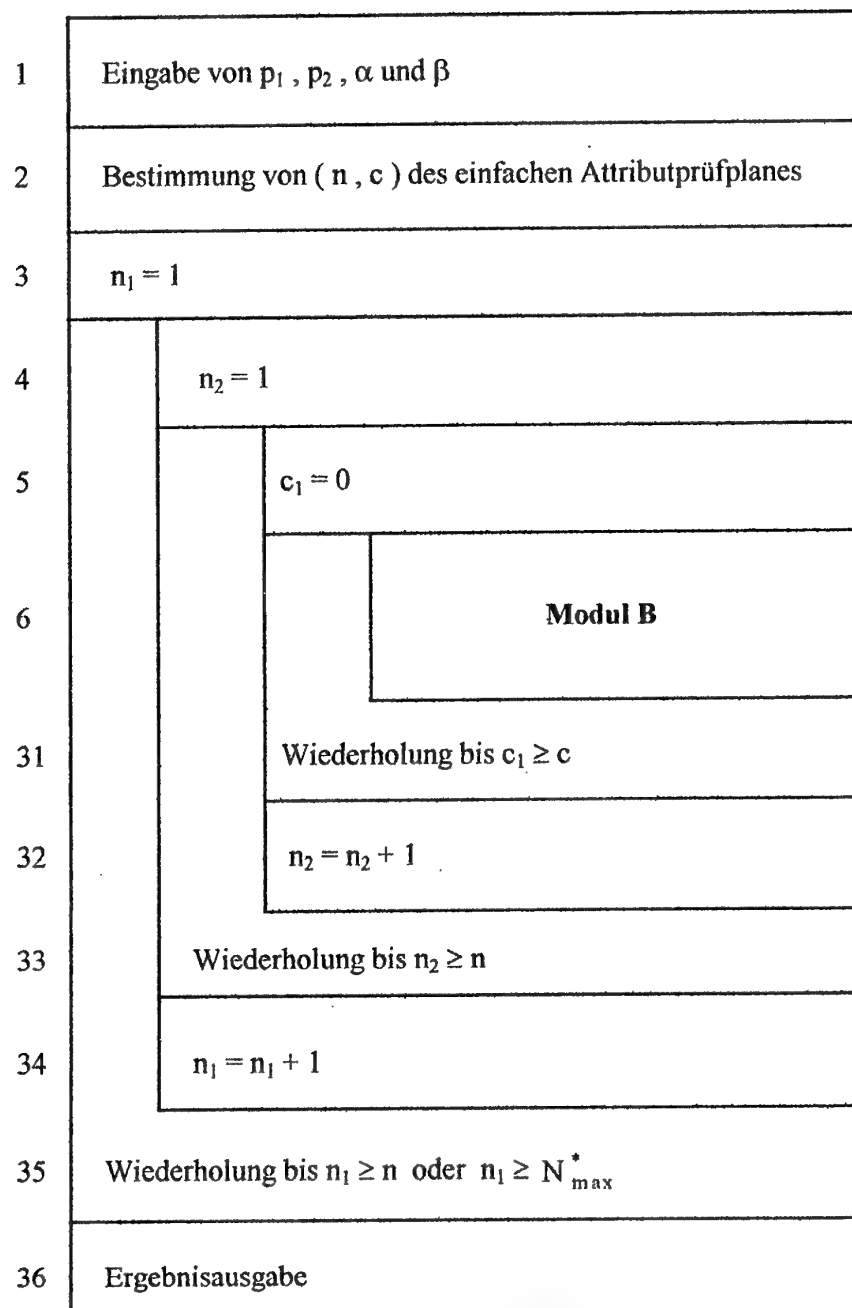


Abb. 3 : Modul A des Algorithmus zur Bestimmung von δ^*

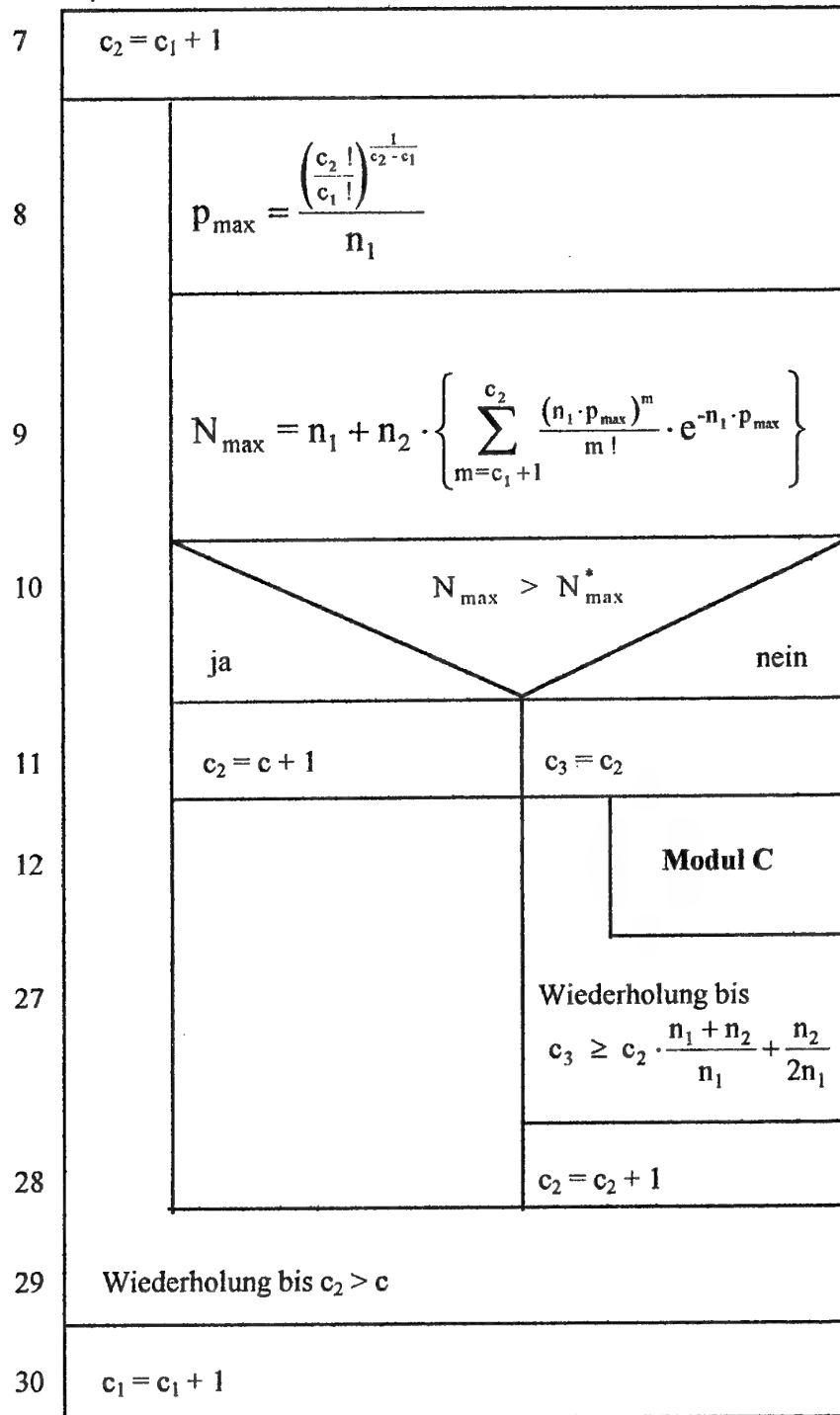


Abb. 4 : Modul B des Algorithmus zur Bestimmung von δ^*

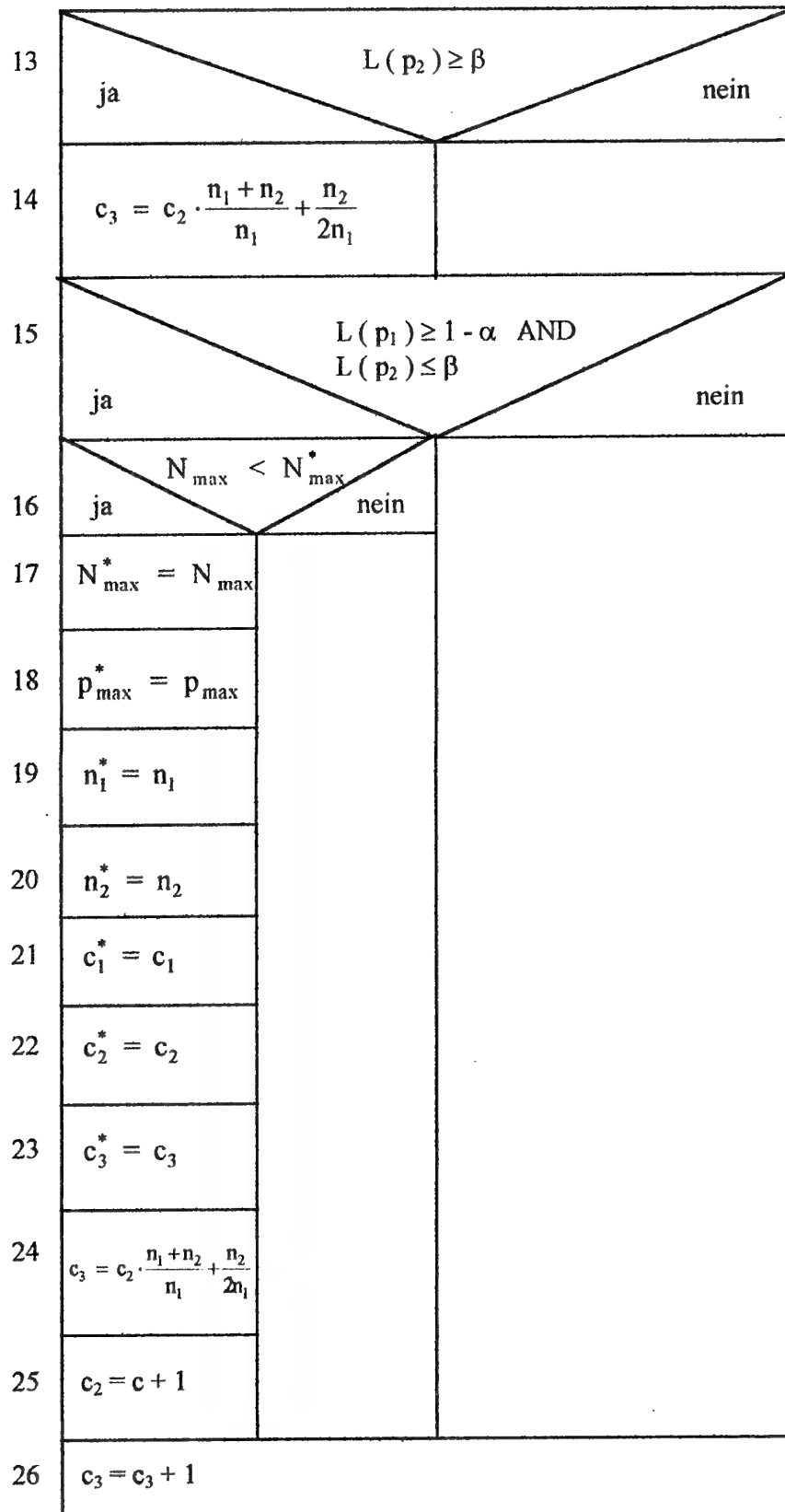


Abb. 5 : Modul C des Algorithmus zur Bestimmung von δ^*

Nachfolgend wird der in den Abbildungen 3 bis 5 dargestellte Algorithmus erläutert. Der Aufruf des Moduls B bei Ziffer 6 bedeutet, daß an der entsprechenden Stelle die zugehörige Verfahrensbeschreibung der Abbildung 4 einzufügen ist. Dementsprechend ergibt sich für Modul C (Ziffer 12) die Abbildung 5.

Um den doppelten Attributprüfplan δ^* zu erhalten, werden für alle möglichen Kombinationen aus n_1 , n_2 , c_1 , c_2 und c_3 die oben genannten Bedingungen (1a) und (2a) geprüft.

Die Anzahl der in Frage kommenden Kombinationen konnte durch (43a,b,c) drastisch reduziert werden. Somit gelangt der oben dargestellte Algorithmus innerhalb annehmbarer Rechenzeiten zu einem Ergebnis. Darüber hinaus ergeben sich für einzelne Parameter weitere Einschränkungen. So ist z.B. $n_1 \leq N_{\max}^*$ (vgl. Ziffer 35) unmittelbar aus (21) einsichtig.

Der Algorithmus beginnt mit der Parametereingabe (Ziffer 1) und der anschließenden Berechnung des zugehörigen einfachen Attributprüfplanes gemäß Abbildung 1. Die hieraus resultierenden Kenngrößen n und c stellen für n_1 (vgl. Ziffer 35) und n_2 (vgl. Ziffer 33) bzw. c_1 (vgl. Ziffer 31) die Obergrenzen dar. Vier der fünf unabhängigen, einen zweifachen Attributprüfplan charakterisierenden Parameter (n_1 , n_2 , c_1 und c_2) erhalten die zugehörigen Startwerte (Ziffer 3, 4, 5 und 7). Da der Ausschußprozentsatz p_{\max} von c_3 unabhängig ist, kann dieser nun für die gegebenen Parameter bestimmt werden (vgl. Ziffer 8). Darüber hinaus wird der zu p_{\max} gehörige ASN-Wert errechnet (Ziffer 9). Sofern dieser größer als der bisherige kleinste ASN-Wert (N_{\max}^*) ist, kann c_2 gleich $c + 1$ gesetzt werden. (Ziffer 11) Ein Schleifendurchlauf mit steigenden c_2 -Werten hätte unter diesen Umständen nur noch höhere ASN-Werte zur Folge, da $N_8(p)$ mit steigendem c_2 zunimmt. (vgl. Formel bei Ziffer 9) Dementsprechend können eine Reihe von Durchläufen vernachlässigt werden. Die c_2 -Schleife wird bei Ziffer 29 verlassen und c_1 wird inkrementiert (Ziffer 30).

Im Falle von $N_{\max} < N_{\max}^*$ wird auch dem letzten freien Parameter (c_3) ein Startwert zugewiesen (vgl. Ziffer 10 und 11). Im Anschluß wird das Modul C abgearbeitet, d.h. zunächst wird die Bedingung $L(p_2) \geq \beta$ überprüft. Falls der OC-Wert an der Stelle p_2 größer als β ist, wird c_3 gleich $c_2/n_1 \cdot (n_1+n_2) + 1/2 \cdot n_2/n_1$ gesetzt und somit der c_3 -Schleifendurchlauf bei Ziffer 27 beendet. Dies ist möglich, da mit steigendem c_3 auch der OC-Wert an der Stelle p_2 weiter zunimmt und somit die Bedingung $L(p_2) \leq \beta$ erst recht nicht erfüllt. Auch hierdurch wird die Anzahl der zu testenden Kombinationsmöglichkeiten erheblich reduziert. Sofern $L(p_2) \leq \beta$ ist, wird auch die Bedingung (1a) (Ziffer 15) und $N_{\max} < N_{\max}^*$ (Ziffer 16) geprüft. Vorausgesetzt diese sind erfüllt, so ist ein zweifacher Attributprüfplan ermittelt, der sowohl zugelassen ist, als auch einen maximalen ASN-Wert aufweist, der unterhalb des bisher besten Planes liegt. Dementsprechend werden zwischen Ziffer 17 und 23 den Ergebnisspeichern die neuen Ergebnisse übergeben. Die Werte c_2 und c_3 werden auf $c + 1$ bzw. $c_2/n_1 \cdot (n_1+n_2) + 1/2 \cdot n_2/n_1$ gesetzt, da Kombinationsmöglichkeiten mit gleichen n_1, n_2, c_1 Werten und steigenden bzw. gleichbleibenden c_2 Werten (vgl. Formel bei Ziffer 9) nur zu höheren ASN-Werten führen.⁴⁴ Die c_3 -Schleife wird wieder bei Ziffer 27 und die c_2 -Schleife bei Ziffer 29 verlassen. Bei Ziffer 30 wird c_1 erneut inkrementiert. Der Vorgang (Ziffer 6 bis 30) wiederholt sich solange, bis $c_1 \geq c$ ist. (Ziffer 31) Im Anschluß hieran wird der Wert n_2 um 1 erhöht, c_1 auf 0 gesetzt und der oben beschriebene Vorgang wiederholt sich entsprechend. Erst mit $n_2 \geq n$ wird dieser Schleifendurchlauf bei Ziffer 33 beendet. Es folgt die Inkrementierung von n_1 (Ziffer 34). Diese äußerste Schleife, inkl. der 4 inneren Schleifen, wird nun durchlaufen bis $n_1 \geq n$ oder $n_1 \geq N_{\max}^*$ ist (Ziffer 35). Nachdem alle 5 Schleifen vollständig abgearbeitet worden sind, verkörpern die Werte $n_1^*, n_2^*, c_1^*, c_2^*$ und c_3^* den doppelten Attributprüfplan, der zu gegebenen Bedingungen (1a) und (2a) den kleinsten ASN-Wert an der Stelle p_{\max} besitzt. Die Ergebnisausgabe erfolgt bei Ziffer 36 und beendet den Algorithmus.

⁴⁴ Der Parameter c_3 hat nur einen Einfluß auf die OC-Werte, jedoch nicht auf die ASN-Werte.

3.3 : Auswirkungen von Restriktionen auf die ASN

In der Literatur finden sich relativ wenige Vorschläge zur Konstruktion zweifacher Pläne, die (1a) , (2a) erfüllen. Üblich sind Restriktionen zwischen den einzelnen Parametern dieser Pläne. So gilt z.B. im Fall der Attributprüfung für Doppelstichprobenpläne von DODGE / ROMIG⁴⁵ $c_2 = c_3$, für die Tabellen der Columbia University⁴⁶ $n_2 = 2n_1$, für den MIL-STD-105 D⁴⁷ bzw. die Stichprobentabellen zur Attributprüfung⁴⁸ (entspricht der DIN 40080) $n_1 = n_2$ bzw. $n_1 = n_2$ und $c_2 = c_3$ und für das Philips Standard Stichprobensystem⁴⁹ $n_2 = 2n_1$ und darüber hinaus bei großen Losumfängen $c_2 = 5c_1$.

Die Restriktionen, die bei den gängigen Prüfplansystemen den Parametern der zweifachen Pläne auferlegt werden, können zu beträchtlichen Verlusten bei der maximalen ASN führen. In einigen Fällen übersteigt diese sogar den Prüfumfang der einfachen Pläne.

Für einige gängige Restriktionen soll dieser Effekt an Beispielen demonstriert werden. Sei Z_R die Teilmenge von Z_1 , deren Elemente eine vorgegebene Restriktion (z.B. $n_1 = n_2$) erfüllen. Dann sei δ_R der ASN-Plan bezüglich Z_R , d.h. der Plan mit $N_{\max}(\delta_R) = \min_{\delta \in Z_R} N_{\max}(\delta)$.

Für einige Parameterkonstellationen und einige Restriktionen ist in der folgenden Tabelle 2 jeweils der Plan δ_R und darunter seine maximale ASN angegeben. Zum Vergleich sind noch der ASN-Plan δ^* und der einfache Plan (n , c) mitangegeben.

⁴⁵ Vgl. Schaafsma / Willemze ; Moderne Qualitätskontrolle ; Seite 218f. u. 229.
⁴⁶ Vgl. Schaafsma / Willemze ; Moderne Qualitätskontrolle ; Seite 222f. u. 230.
⁴⁷ Vgl. Military Standard MIL-STD-105 D (1963) ; Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes. Superintendent of Documents ; US Government Printing Office ; Washington D.C.
⁴⁸ Vgl. Stichprobentabellen zur Attributprüfung ; Erläuterungen und Handhabung ; Deutsche Gesellschaft für Qualität ; Frankfurt/M.
⁴⁹ Vgl. Schaafsma / Willemze ; Moderne Qualitätskontrolle ; Seite 216f. u. 228.

P_1 α	P_2 β	$n_1 = n_2, c_2 = c_3$	$n_1 = n_2$	$c_2 = c_3$	$n_2 = 2n_1$	ASN-Plan δ^*	(n, c)
0.04	0.09	$\begin{pmatrix} 117 & 5 & 14 \\ 117 & 14 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 216.68$	$\begin{pmatrix} 121 & 5 & 9 \\ 121 & 15 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 185.76$	$\begin{pmatrix} 165 & 8 & 13 \\ 48 & 13 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 191.38$	$\begin{pmatrix} 80 & 2 & 7 \\ 160 & 15 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 199.06$	$\begin{pmatrix} 141 & 7 & 10 \\ 104 & 15 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 180.74$	(211, 13)
0.005	0.05	$\begin{pmatrix} 59 & 0 & 2 \\ 59 & 2 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 93.63$	$\begin{pmatrix} 57 & 0 & 1 \\ 57 & 2 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 77.97$	$\begin{pmatrix} 64 & 0 & 2 \\ 48 & 2 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 92.17$	$\begin{pmatrix} 49 & 0 & 1 \\ 98 & 2 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 85.05$	$\begin{pmatrix} 59 & 0 & 1 \\ 48 & 2 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 76.66$	(107, 2)
0.01	0.05	$\begin{pmatrix} 89 & 1 & 4 \\ 89 & 4 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 143.93$	$\begin{pmatrix} 88 & 1 & 3 \\ 88 & 4 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 129.40$	$\begin{pmatrix} 94 & 1 & 3 \\ 47 & 3 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 116.11$	$\begin{pmatrix} 58 & 0 & 2 \\ 116 & 4 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 126.08$	$\begin{pmatrix} 94 & 1 & 3 \\ 47 & 3 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 116.11$	(134, 3)
0.02	0.08	$\begin{pmatrix} 61 & 1 & 5 \\ 61 & 5 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 105.18$	$\begin{pmatrix} 65 & 1 & 3 \\ 65 & 6 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 95.58$	$\begin{pmatrix} 80 & 2 & 5 \\ 40 & 5 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 101.90$	$\begin{pmatrix} 41 & 0 & 3 \\ 82 & 5 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 100.53$	$\begin{pmatrix} 57 & 1 & 3 \\ 66 & 5 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 88.05$	(116, 5)
0.10	0.01	$\begin{pmatrix} 67 & 0 & 3 \\ 67 & 3 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 115.64$	$\begin{pmatrix} 67 & 0 & 2 \\ 67 & 3 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 106.32$	$\begin{pmatrix} 69 & 0 & 2 \\ 41 & 2 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 93.06$	$\begin{pmatrix} 58 & 0 & 2 \\ 116 & 3 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 126.08$	$\begin{pmatrix} 69 & 0 & 2 \\ 41 & 2 \end{pmatrix}$ $N_{\max} = 93.06$	(106, 2)

Tabelle 2: Vergleich von ASN-Plänen unter verschiedenen Restriktionen.

Die in der Tabelle 2 dargestellten konstanten Verhältniszahlen finden wie erwähnt in bestehenden Tafelwerken zur Attributprüfung Verwendung.

Es ergibt sich beispielsweise für die Eingangsparameter $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.08$, $\alpha = 0.1$ und $\beta = 0.01$ der einfache Attributprüfplan $(n, c) = (106, 2)$. Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $n_2 = 2n_1$, d.h. derjenigen Einschränkung die sich u.a. in den Tabellen der Columbia University und im Philips-Stichprobensystem findet, errechnet sich

$$\delta_R = \begin{pmatrix} n_1 & c_1 & c_2 \\ n_2 & c_3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 0 & 2 \\ 116 & 3 & \end{pmatrix}. \text{ Dieser Plan besitzt einen maxi-}$$

malen ASN-Wert von $N_{\max}(\delta_R) = 126.08$. Der durchschnittliche Stichprobenumfang dieses Planes liegt somit um 18.94 % oberhalb des Stichprobenumfanges n des OC-äquivalenten einfachen Attributprüfplanes. Im Vergleich hierzu ist $N_{\max}(\delta^*) = 93.06$. Dies bedeutet, daß $N_{\max}(\delta^*)$ um 12.21 % unterhalb von n liegt.

Ein ähnliches Ergebnis ergibt sich unter Berücksichtigung der Vereinfachungen $n_1 = n_2$ bzw. $n_1 = n_2$ und $c_2 = c_3$. Auch in diesen beiden Fällen ist $N_{\max}(\delta_R) > n$.

Unter Berücksichtigung der von DODGE/ROMIG gewählten Einschränkung $c_2 = c_3$ ergibt sich für einige wenige Eingangsparameter p_1, p_2, α, β der ASN-Plan δ^* . Dieses gilt jedoch nur in ausgesprochen wenigen Fällen. Im allgemeinen besitzen auch die von DODGE/ROMIG ermittelten Pläne δ_R ein $N_{\max}(\delta_R) > N_{\max}(\delta^*)$. So ist beispielsweise für die Eingangsparameter $p_1 = 0.005$, $p_2 = 0.05$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$, unter Berücksichtigung der Einschränkung $c_2 = c_3$, $N_{\max}(\delta_R) = 92.17 > N_{\max}(\delta^*) = 76.66$.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß sich unter der gleichzeitigen Verwendung von mehreren Restriktionen (z.B. $n_2 = 2n_1$ und $c_2 = c_3$) äußerst negative Ergebnisse ergaben. Darüber hinaus erwies sich auch die einzelne Restriktion $n_2 = 2n_1$ als besonders negativ.

Kapitel 4 : Ein- und zweifache Variablenprüfpläne

4.1 : Einfache Variablenprüfpläne

Wir befassen uns nun mit der messenden Abnahmeprüfung. Das interessierende Merkmal sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt mit bekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Es sei eine einseitige Toleranzgrenze vorgegeben, von der wir ohne Einschränkung annehmen können, daß sie eine untere Toleranzgrenze T_u ist.

Der Ausschußanteil p ist jetzt :

$$(48) \quad p := P(X \leq T_u) = \Phi\left(\frac{T_u - \mu}{\sigma}\right).$$

Definition 8: Der einfache Variablenprüfplan (n, k) mit der natürlichen Zahl n und der reellen Zahl k ist gegeben durch die Prüfvorschrift :

(i) Ziehe eine Stichprobe X_1, X_2, \dots, X_n bzgl. X und

$$\text{bestimme } T := \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - T_u}{\sigma}.$$

(ii) Falls $T \geq k$, Annahme des Loses.

Falls $T < k$, Rückweisung des Loses.

Für die Operationscharakteristik von (n, k) gilt unter Beachtung von (48) :

$$L(p) = P_p\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - T_u}{\sigma} \geq k\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P_p \left(\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \geq k - \sqrt{n} \cdot \frac{\mu - T_u}{\sigma} \right) \\
 &= 1 - \Phi \left(k - \sqrt{n} \cdot \frac{\mu - T_u}{\sigma} \right) \\
 &= \Phi \left(-k - \sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(p) \right) \\
 (49) \quad &= \Phi \left(\sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1-p) - k \right)
 \end{aligned}$$

Gegeben seien wieder eine Gutgrenze p_1 , eine Schlechtgrenze p_2 ($0 < p_1 < p_2 < 1$) sowie Fehlerniveaus α, β ($0 < \beta < 1 - \alpha < 1$). Der zu p_1, p_2, α, β gehörende Variablenprüfplan (n, k) ist derjenige, der unter allen Plänen, deren OC die Bedingungen (1a) und (2a) erfüllt, den kleinsten Prüfumfang hat. Unter Beachtung von (49) sind (1a) und (2a) äquivalent zu

$$(50) \quad k \leq k_1(n) := \sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1 - p_1) - \Phi^{-1}(1 - \alpha) \text{ und}$$

$$(51) \quad k \geq k_2(n) := \sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1 - p_2) - \Phi^{-1}(\beta).$$

Der Prüfumfang des zu p_1, p_2, α, β gehörenden Planes ist somit die kleinste natürliche Zahl n , die

$$(52) \quad k_2(n) \leq k_1(n)$$

erfüllt. Den kritischen Wert dieses Planes wählt man üblicherweise zu

$$(53) \quad k = \frac{1}{2} \cdot (k_1(n) + k_2(n)).$$

Es sei noch bemerkt, daß wegen (50), (51) die Bedingung (52) äquivalent ist zu

$$(54) \quad \sqrt{n} \geq \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \Phi^{-1}(\beta)}{\Phi^{-1}(p_2) - \Phi^{-1}(p_1)}.$$

Beispiel 6: $p_1 = 0.02$, $p_2 = 0.05$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$

Aus (54) erhält man $\sqrt{n} \geq 7.15686$.

Somit ist $n = 52$.

$k_1 (52) = 13.16495$

$k_2 (52) = 13.14275$

Somit ist $k = 13.15385$.

Der gesuchte Plan lautet : $(n , k) = (52 , 13.15385)$.

Der OC-äquivalente einfache Attributprüfplan lautet :

$(n , c) = (332 , 11)$.

4.2 : Zweifache Variablenprüfpläne

Zweifache Variablenprüfpläne für den Fall der Normalverteilung wurden zuerst von BOWKER / GOODE⁵⁰ vorgeschlagen. Solche Pläne sollen wieder (wie bei den entsprechenden Attributprüfplänen) im Mittel Prüfumfang einsparen im Vergleich zu den entsprechenden einfachen Variablenprüfplänen. Auf diesen zweifachen Variablenprüfplänen beruhen Stichprobensysteme, die man z.B. bei SCHILLING⁵¹, oder im MIL-STD-414⁵² findet. Sei wieder X ein $N (\mu , \sigma^2)$ -verteiltes Merkmal mit bekanntem $\sigma > 0$ und einer vorgegebenen unteren Toleranzgrenze T_u .

⁵⁰ Vgl. Bowker, Albert H. / Goode, Henry P. ; Sampling Inspection By Variables ; Stanford University ; 1952.

⁵¹ Vgl. Schilling, Edward G. ; Acceptance Sampling In Quality Control ; 1982 ; Marcel Dekker ; Seite 639 ff.

⁵² Eine kurze Beschreibung des MIL-STD-414 findet sich in : Schindowski / Schürz ; Statistische Qualitätskontrolle : Kontrollkarten und Stichprobenpläne ; Seite 308 ff.

Vgl. auch Montgomery, Douglas C. ; Introduction to Statistical Quality Control ; Arizona State University ; Chapter 14.

Vgl. auch Vogt, Herbert ; Methoden der statistischen Qualitätskontrolle ; Seite 141 ff.

Vgl. auch Schilling, Edward G. ; Variables sampling and MIL-STD-414 ; in : Quality Progress ; May 1974 ; Seite 16 ff.

Vgl. auch Duncan, Acheson J. ; Sampling By Variables To Control The Fraction Defective ; Part I ; in : Journal of Quality Technology ; Vol.7 ; No. 1 ; Januar 1975 ; Seite 34 ff.

Definition 9: Seien n_1, n_2 natürliche und k_1, k_2, k_3 reelle

Zahlen mit $k_2 \leq k_1$.

Der zweifache Variablenprüfplan $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$ ist

gegeben durch die Prüfvorschrift :

(i) Ziehe eine 1. Stichprobe und ermittle den Stichproben-

mittelwert \bar{X}_1 sowie $T_1 = \sqrt{n_1} \frac{\bar{X}_1 - T_u}{\sigma}$.

Falls $T_1 \geq k_1$, Annahme der Partie.

Falls $T_1 \leq k_2$, Rückweisung der Partie.

Falls $k_2 < T_1 < k_1$, gehe zu (ii) .

(ii) Ziehe eine 2. Stichprobe und ermittle den Stichproben-

mittelwert \bar{X}_2 sowie $T_2 = \sqrt{n_2} \frac{\bar{X}_2 - T_u}{\sigma}$.

Falls $T_2 \geq k_3$, Annahme der Partie.

Falls $T_2 < k_3$, Rückweisung der Partie.

Lemma 6 : Für die OC von $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$ gilt :

$$L_\delta(p) = \Phi(\sqrt{n_1} \Phi^{-1}(1-p) - k_1) + \Phi(\sqrt{n_2} \Phi^{-1}(1-p) - k_3) \cdot$$

(55)

$$\left[\Phi(k_1 + \sqrt{n_1} \Phi^{-1}(p)) - \Phi(k_2 + \sqrt{n_1} \Phi^{-1}(p)) \right] .$$

Beweis : Wir unterstellen die Unabhängigkeit der beiden Stichproben.

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} L_{\delta}(p) &= L(p) = \\ (56) \quad &P_p(T_1 \geq k_1) + P_p(k_2 < T_1 < k_1) \cdot P_p(T_2 \geq k_3). \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (48) erhält man analog zur Herleitung von (49)

$$(57) \quad P_p(T_1 \geq k_1) = \Phi(\sqrt{n_1}\Phi^{-1}(1-p) - k_1),$$

$$(58) \quad P_p(T_2 \geq k_3) = \Phi(\sqrt{n_2}\Phi^{-1}(1-p) - k_3),$$

$$\begin{aligned} &P_p(k_2 < T_1 < k_1) = \\ (59) \quad &\Phi(k_1 + \sqrt{n_1}\Phi^{-1}(p)) - \Phi(k_2 + \sqrt{n_1}\Phi^{-1}(p)). \end{aligned}$$

Aus (56) - (59) folgt (55). Somit ist Lemma 6 bewiesen.

Für den mittleren Prüfumfang (ASN) von $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$

erhält man :

$$\begin{aligned} N_{\delta}(p) &= N(p) = \\ (60) \quad &n_1 + n_2 \cdot [\Phi(k_1 + \sqrt{n_1}\Phi^{-1}(p)) - \Phi(k_2 + \sqrt{n_1}\Phi^{-1}(p))] \end{aligned}$$

Im folgenden bezeichne wieder $N_{\max}(\delta)$ die maximale ASN und p_{\max} den Ort, an dem dieses Maximum angenommen wird. Das folgende Lemma gibt eine einfache Formel für N_{\max} und p_{\max} an.

Lemma 7: Für den zweifachen Variablenprüfplan $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$

($k_2 < k_1$) gilt

(61) $N_{\max}(\delta) = N_{\delta}(p_{\max})$ mit

(62) $p_{\max} = 1 - \Phi\left(\frac{k_1 + k_2}{2 \cdot \sqrt{n_1}}\right)$.

Beweis : Differentiation von (60) liefert

$$\begin{aligned} N'(p) = n_2 \cdot [\Phi'(k_1 + \sqrt{n_1} \cdot \Phi^{-1}(p)) \cdot (\sqrt{n_1} \cdot (\Phi^{-1}(p)))' \\ - \Phi'(k_2 + \sqrt{n_1} \cdot \Phi^{-1}(p)) \cdot (\sqrt{n_1} \cdot (\Phi^{-1}(p)))'] \end{aligned}$$

Für $0 < p < 1$ gilt $N'(p) = 0$ genau dann, wenn $p = p_{\max}$ gilt.

Somit ist Lemma 7 bewiesen.

Bemerkung 9 : Die Extremstelle der ASN ist somit unabhängig von n_2 und k_3 . Die Parallelen zu den Resultaten bei den doppelten Attributprüfplänen sind unverkennbar. Auch dort war p_{\max} von n_2 und c_3 unabhängig.

Kapitel 5 : Die Bestimmung zweifacher Variablen- prüfpläne mit minimaler maximaler ASN

In diesem Kapitel wird ein Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen entwickelt. Die mit Hilfe dieses Algorithmus ermittelten Ergebnisse werden dann im Abschnitt 5.3 mit den Resultaten von SCHILLING⁵³ verglichen. Zunächst werden jedoch noch einige theoretische Grundlagen der doppelten Variablenprüfung angegeben.

5.1 : Theoretische Grundlagen

Wie in Kapitel 4 sei das interessierende Merkmal wieder $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt mit bekanntem $\sigma > 0$. Darüber hinaus sei für den zweifachen Variablenprüfplan $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$ auch wieder eine untere Toleranzgrenze T_u unterstellt.

Z bezeichne wieder die Menge aller zugelassenen zweifachen Variablenprüfpläne, d.h. solcher Pläne δ , die (1a) und (2a) erfüllen.

Definition 10: $\tilde{\delta} \in Z$ heißt **ASN-Plan zur messenden Prüfung**,

$$\text{wenn } N_{\max}(\tilde{\delta}) = \min_{\delta \in Z} N_{\max}(\delta) \text{ gilt.}$$

⁵³

Vgl. Schilling, Edward G. ; Acceptance Sampling In Quality Control ; Marcel Dekker ; 1982 ; Seite 639 ff.

Bemerkung 10: (i) Eine Bestimmung des ASN-Planes $\tilde{\delta}$ gemäß

Definition 10 erscheint aufgrund der Komplexität der Menge Z sehr schwierig. Daher betrachten wir im folgenden die Teilmenge $Z_1 \subset Z$, die durch (63) - (67) definiert⁵⁴ ist :

$$(63) \lfloor 0.4 \cdot n \rfloor \leq n_1 \leq \lceil 0.85 \cdot n \rceil,$$

$$(64) \lfloor 0.3 \cdot n \rfloor \leq n_2 \leq \lceil 0.85 \cdot n \rceil,$$

$$(65) \lfloor 0.6 \cdot k \rfloor \leq k_1 \leq \lceil 1.30 \cdot k \rceil,$$

$$(66) \lfloor 0.5 \cdot k \rfloor \leq k_2 \leq \lceil 0.90 \cdot k \rceil,$$

$$(67) \lfloor 0.5 \cdot k \rfloor \leq k_3 \leq \lceil 1.10 \cdot k \rceil.$$

(ii) Sei Z_1 die Menge aller zugelassenen Pläne $\delta = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$,

die (63) - (67) erfüllen. Es werden wiederum⁵⁵ solche Pläne

$\delta^* \in Z_1$ bestimmt, für die

$$(68) N_{\max}(\delta^*) = \min_{\delta \in Z_1} N_{\max}(\delta)$$

gilt.

(iii) Für die zugelassenen zweifachen Variablenprüfpläne

$$\tilde{\delta} \in Z \text{ und } \delta^* \in Z_1 \text{ mit } N_{\max}(\tilde{\delta}) = \min_{\delta \in Z} N_{\max}(\delta) \text{ und}$$

$$N_{\max}(\delta^*) = \min_{\delta \in Z_1} N_{\max}(\delta) \text{ gilt stets } N_{\max}(\tilde{\delta}) \leq N_{\max}(\delta^*).$$

Allerdings vermuten wir, daß Z_1 so umfassend ist, daß entweder

bereits $\tilde{\delta} = \delta^*$ gilt, oder daß $N_{\max}(\tilde{\delta}) - N_{\max}(\delta^*)$ so klein ist,

daß diese Differenz für die Bedürfnisse der Praxis nicht sehr

bedeutend ist.

⁵⁴ $\lceil \quad \rceil$ = Aufrunden auf die nächst größere ganze Zahl.

$\lfloor \quad \rfloor$ = Abrunden auf die nächst kleinere ganze Zahl.

⁵⁵ Vgl. Kapitel 2 Nr. (26).

Bemerkung 11: (i) Mit Hilfe des in Kapitel 5.2 dargestellten Algorithmus konnte stets ein Plan $\delta^* \in Z_1$ mit

$$N_{\max}(\delta^*) = \min_{\delta \in Z_1} N_{\max}(\delta) < n$$

ermittelt werden. Auch für die doppelte Variablenprüfung wurde ein Computerprogramm auf der Grundlage des in Abschnitt 5.2 beschriebenen Algorithmus entwickelt. Dieses Programm gestattet es wiederum, zu beliebigen p_1, p_2, α, β den doppelten Variablenprüfplan δ^* für die Menge Z_1 zu bestimmen.

(ii) Alle berechneten Pläne wiesen die folgende Eigenschaften auf :

$$(69) \quad p_1 < p_{\max} < p_2.$$

Dieses zeigt wiederum⁵⁶, daß das verwendete Kriterium der maximalen ASN auch in der Variablenprüfung nicht zu pessimistisch ist.

Im folgenden geben wir zunächst noch zwei Beispiele an, bevor der Algorithmus Gegenstand des Abschnittes 5.2 sein wird.

Beispiel 7: $p_1 = 0.02, p_2 = 0.1, \alpha = 0.01, \beta = 0.01$

Einfacher Variablenprüfplan $(n, k) = (37, 10.146)$

Zweifacher Variablenprüfplan $\delta^* = \begin{pmatrix} 28 & 9.289 & 8.385 \\ 14 & 6.199 & \end{pmatrix}$

$$N_{\max}(\delta^*) = 32.88$$

$$p_{\max} = 0.0475$$

Minimale Einsparung an maximaler ASN : 11.14 %

Maximale Einsparung an maximaler ASN : 24.32 %

⁵⁶ Vgl. Bemerkung 5 in Kapitel 3.

Zum Vergleich die entsprechenden Attributprüfpläne :

Einfacher Attributprüfplan $(n, c) = (175, 8)$

Zweifacher Attributprüfplan $\delta^* = \begin{pmatrix} 124 & 4 & 7 \\ 71 & 9 & \end{pmatrix}$

$$N_{\max}(\delta^*) = 156.59$$

$$p_{\max} = 0.0479$$

Minimale Einsparung an maximaler ASN : 10.52 %

Maximale Einsparung an maximaler ASN : 29.14 %

Beispiel 8 : $p_1 = 0.0025$, $p_2 = 0.05$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.05$

Einfacher Variablenprüfplan $(n, k) = (9, 6.678)$

Zweifacher Variablenprüfplan $\delta^* = \begin{pmatrix} 6 & 5.805 & 5.064 \\ 4 & 4.534 & \end{pmatrix}$

$$N_{\max}(\delta^*) = 7.16$$

$$p_{\max} = 0.0133$$

Minimale Einsparung an maximaler ASN : 20.44 %

Maximale Einsparung an maximaler ASN : 33.33 %

Zum Vergleich die entsprechenden Attributprüfpläne :

Einfacher Attributprüfplan $(n, c) = (95, 1)$

Zweifacher Attributprüfplan $\delta^* = \begin{pmatrix} 69 & 0 & 1 \\ 36 & 1 & \end{pmatrix}$

$$N_{\max}(\delta^*) = 82.24$$

$$p_{\max} = 0.0145$$

Minimale Einsparung an maximaler ASN : 13.43 %

Maximale Einsparung an maximaler ASN : 27.37 %

5.2 : Der Algorithmus zur Bestimmung von δ^*

In diesem Abschnitt werden wir den angesprochenen Algorithmus in Struktogrammform darstellen. Der besseren Übersicht ist dieser in die Module A, B, C, D, E, F und G unterteilt worden.

1	Eingabe (p_1 , p_2 , α , β und Durchgänge)
2	Bestimmung des einfachen Variablenprüfplanes (n , k)
3	Zahl = 0 ; gefunden = 0
4	add [0] = 1.0
5	add [1] = 0.5 ; add [2] = 0.25
6	add [3] = 0.1 ; add [4] = 0.05
7	add [5] = 0.02 ; add [6] = 0.01
8	add [7] = 0.005 ; add [8] = 0.0025
9	add [9] = 0.001 ; add [10] = 0.0005
10	Modul B
61	Modul E
110	Ergebnisausgabe für den (Zahl + 1) - Durchgang
111	Zahl = Zahl + 1
112	Ergebnisspeicherung
113	solange Zahl < Durchgänge

Abbildung 6 : Modul A des Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen δ^*

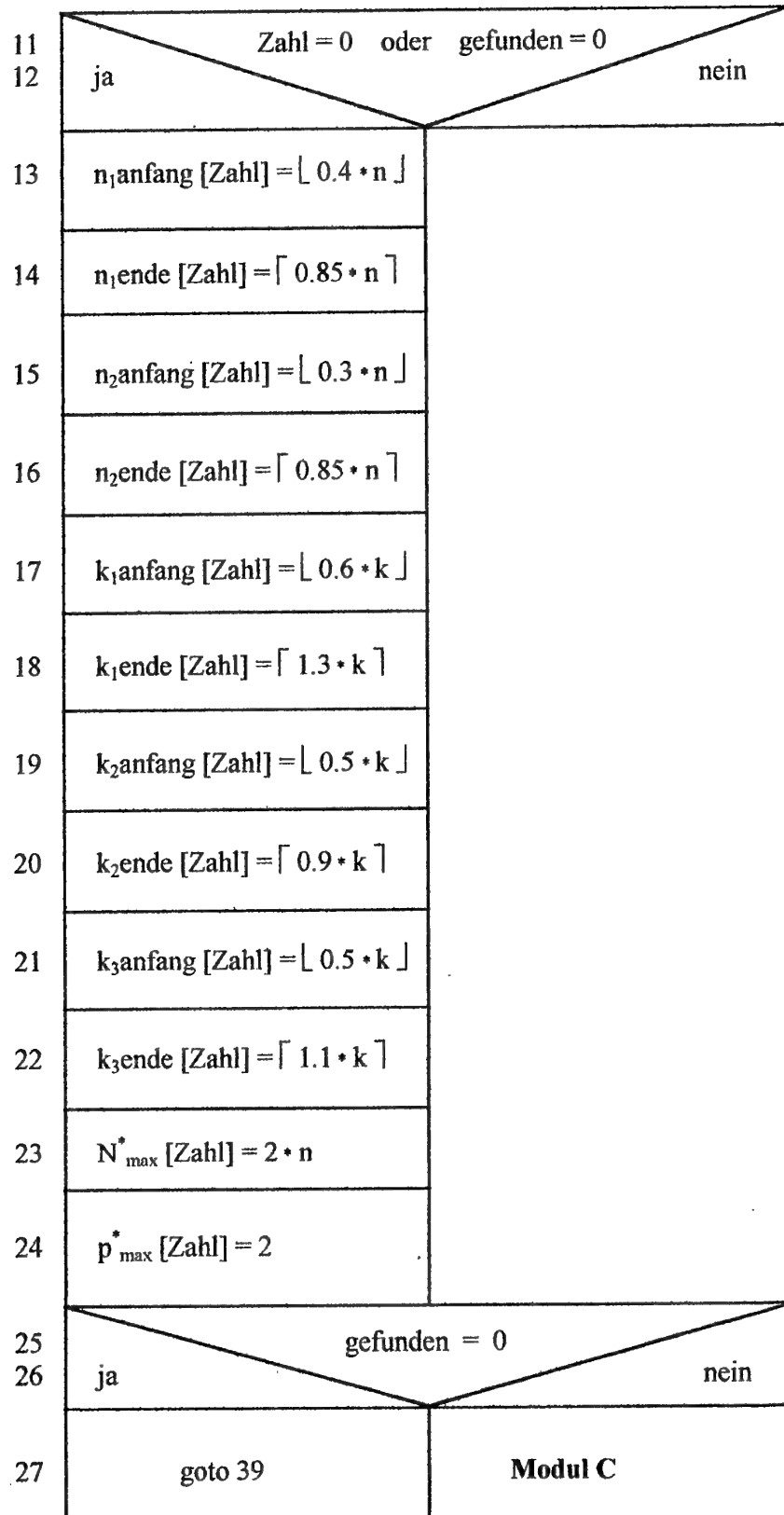


Abbildung 7 : Modul B des Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen δ^*

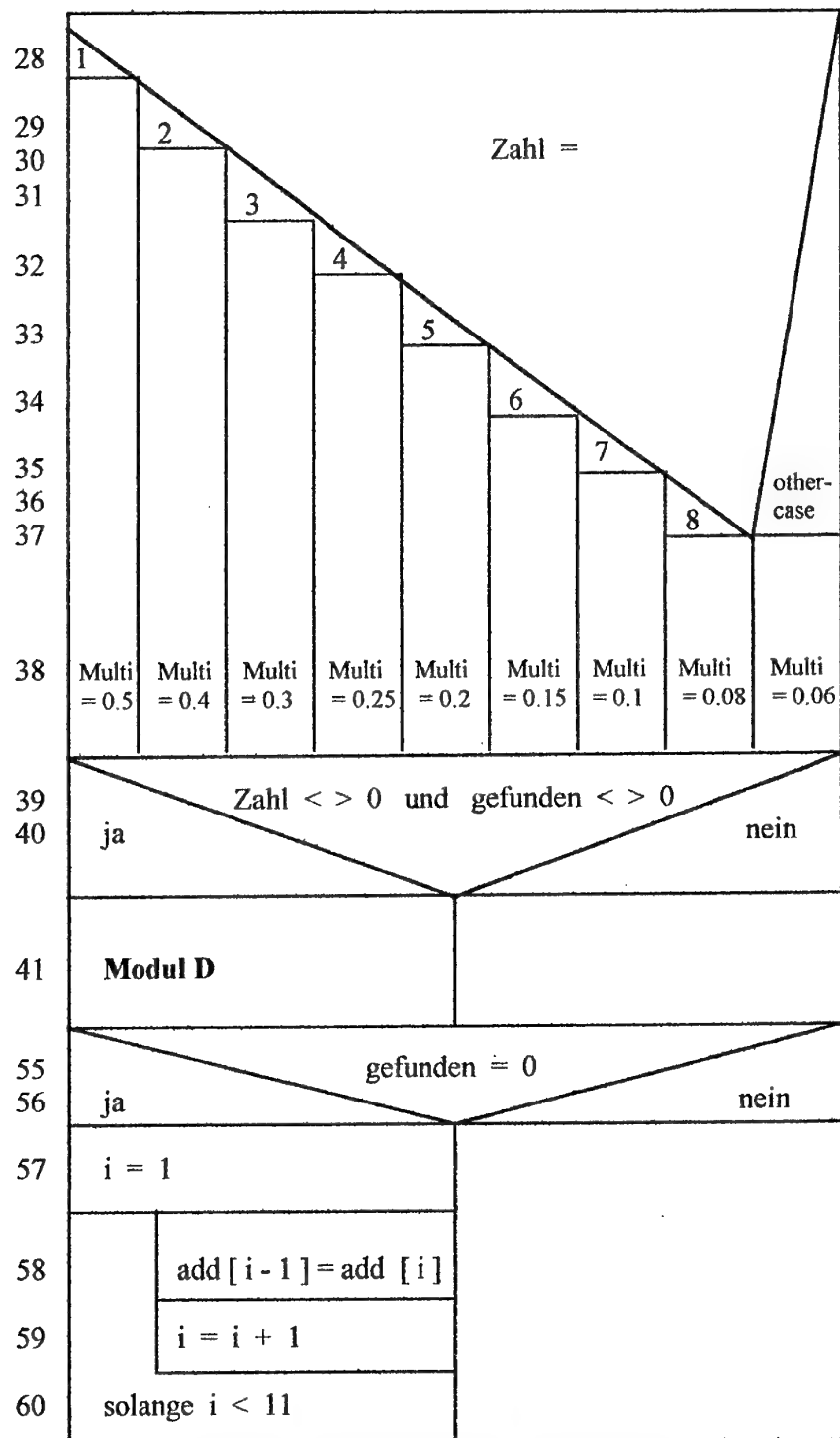


Abbildung 8 : Modul C des Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen δ^*

42	$j = 1$
43	solange $n_1^* [Zahl - j] = 0$
44	$j = j + 1$
45	$n_{1\text{anfang}} [Zahl] = n_1^* [Zahl - j] - \lfloor n_1^* [Zahl - j] \cdot Multi \rfloor$
46	$n_{1\text{ende}} [Zahl] = n_1^* [Zahl - j] + \lceil n_1^* [Zahl - j] \cdot Multi \rceil$
47	$n_{2\text{anfang}} [Zahl] = n_2^* [Zahl - j] - \lfloor n_2^* [Zahl - j] \cdot Multi \rfloor$
48	$n_{2\text{ende}} [Zahl] = n_2^* [Zahl - j] + \lceil n_2^* [Zahl - j] \cdot Multi \rceil$
49	$k_{1\text{anfang}} [Zahl] = k_1^* [Zahl - j] - k_1^* [Zahl - j] \cdot Multi$
50	$k_{1\text{ende}} [Zahl] = k_1^* [Zahl - j] + k_1^* [Zahl - j] \cdot Multi$
51	$k_{2\text{anfang}} [Zahl] = k_2^* [Zahl - j] - k_2^* [Zahl - j] \cdot Multi$
52	$k_{2\text{ende}} [Zahl] = k_2^* [Zahl - j] + k_2^* [Zahl - j] \cdot Multi$
53	$k_{3\text{anfang}} [Zahl] = k_3^* [Zahl - j] - k_3^* [Zahl - j] \cdot Multi$
54	$k_{3\text{ende}} [Zahl] = k_3^* [Zahl - j] + k_3^* [Zahl - j] \cdot Multi$

Abbildung 9 : Modul D des Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen δ^*

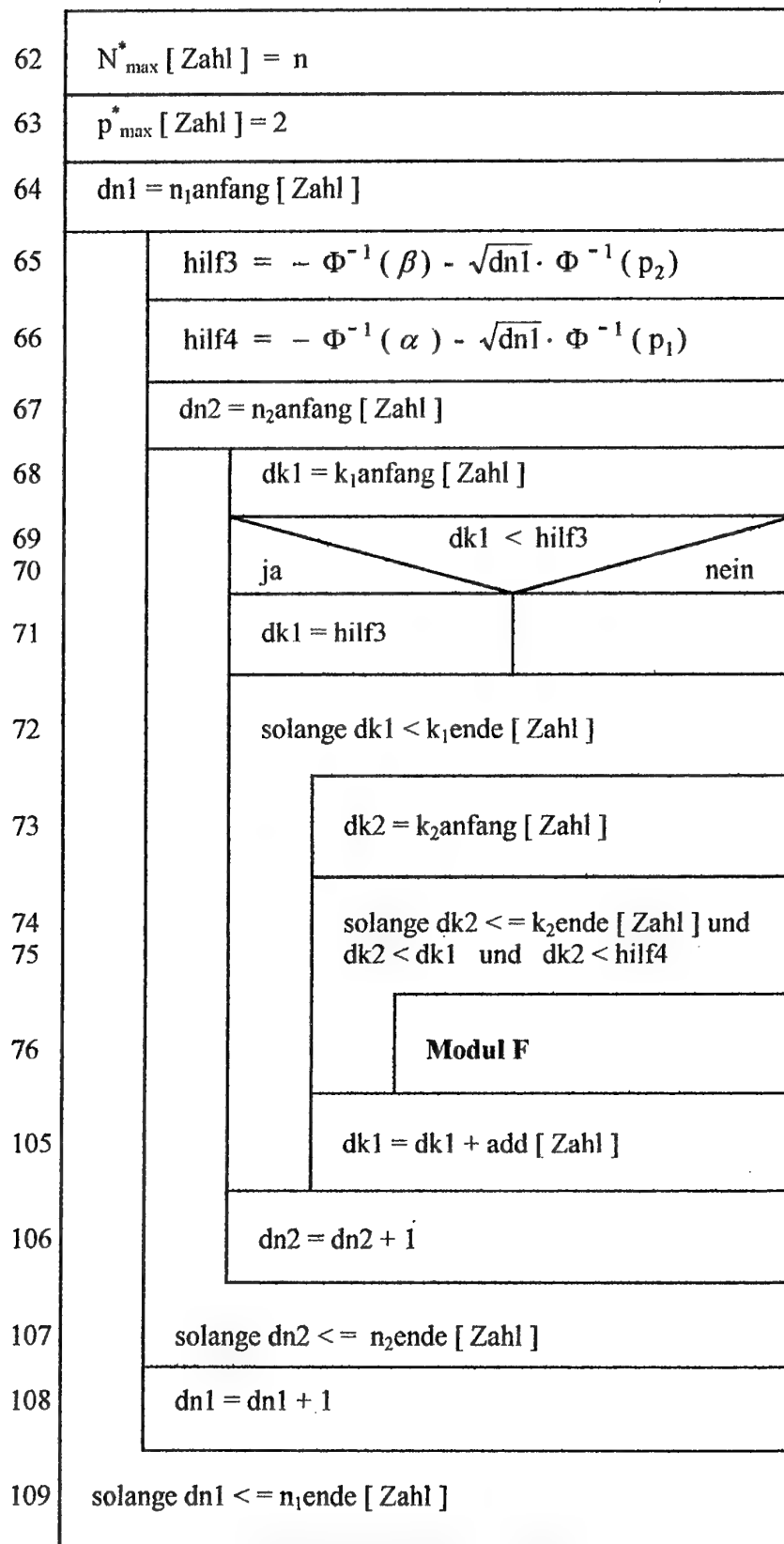


Abbildung 10 : Modul E des Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen δ^*

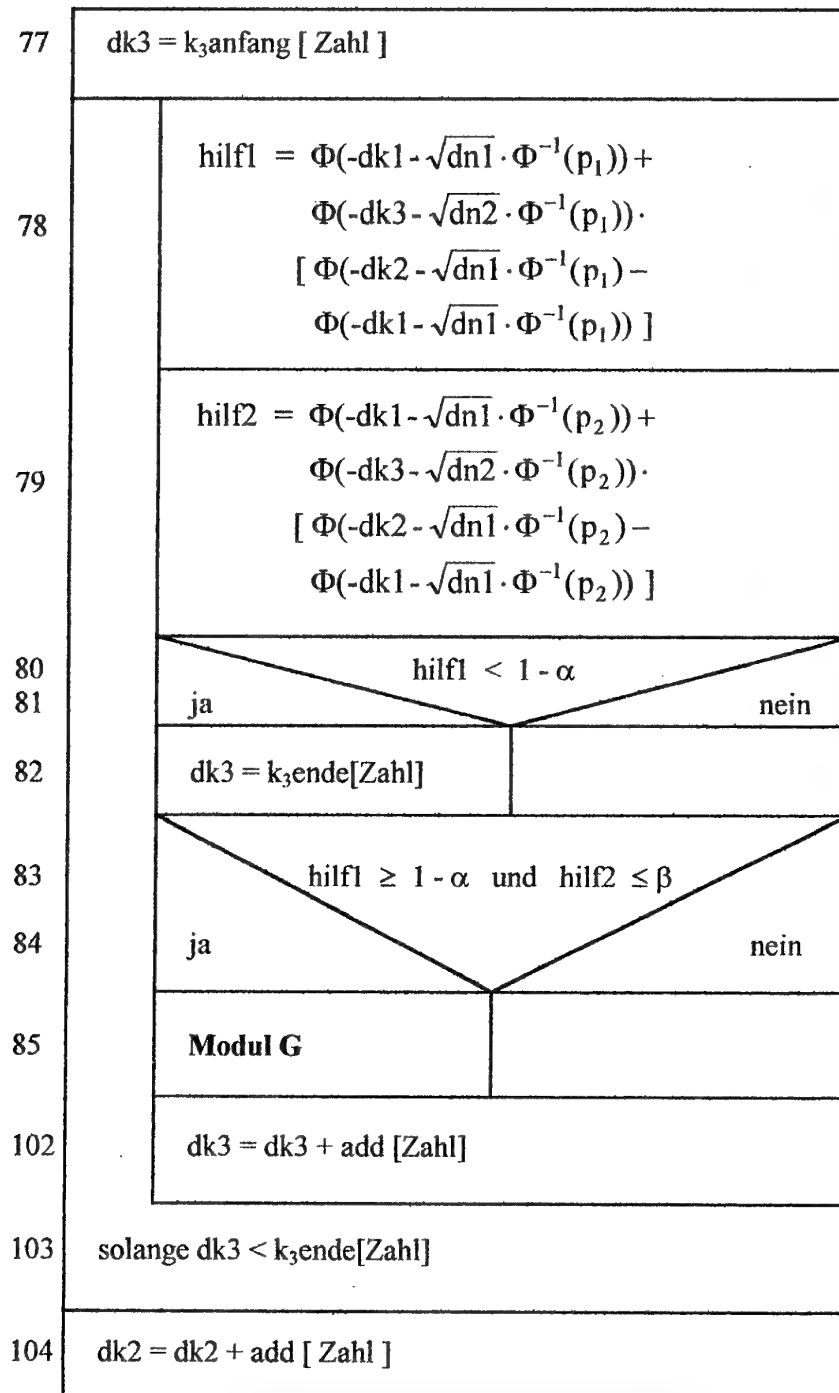


Abbildung 11 : Modul F des Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen δ*

86	$\text{philf} = \Phi \left(\frac{-dk1 - dk2}{2 \cdot \sqrt{dn1}} \right)$	
87	$\text{ASNhlf} = dn1 + dn2 \cdot [\Phi(-dk2 - \sqrt{dn1} \cdot \Phi^{-1}(\text{philf})) - \Phi(-dk1 - \sqrt{dn1} \cdot \Phi^{-1}(\text{philf}))]$	
88	$\text{ASNhlf} \geq N_{\max}^* [\text{Zahl}]$	
89		
90	$dk3 = k_{\text{ende}}[\text{Zahl}]$	
91	$\text{ASNhlf} < N_{\max}^* [\text{Zahl}]$ und $\text{philf} > 0.00000001$	
92		
93		
94	$\text{gefunden} = 1$	
95	$n_1^* [\text{Zahl}] = dn1$	
96	$n_2^* [\text{Zahl}] = dn2$	
97	$k_1^* [\text{Zahl}] = dk1$	
98	$k_2^* [\text{Zahl}] = dk2$	
99	$k_3^* [\text{Zahl}] = dk3$	
100	$N_{\max}^* [\text{Zahl}] = \text{ASNhlf}$	
101	$p_{\max}^* [\text{Zahl}] = \text{philf}$	

Abbildung 12 : Modul G des Algorithmus zur Bestimmung von zweifachen Variablenprüfplänen δ^*

Der in den Abbildungen 6 bis 12 dargestellte Algorithmus ähnelt im Aufbau dem in Kapitel 3.2. Entsprechend dem Algorithmus in Kapitel 3.2 ist auch dieser Algorithmus in einzelne Module zerlegt worden. Diese sind wieder an den entsprechenden Ziffern einzufügen.

5.3 : Die ASN-Pläne δ^* im Vergleich mit Plänen aus Schilling

Um die Berechnung von doppelten Variablenprüfplänen zu vereinheitlichen und zu vereinfachen, existieren in bestehenden Stichprobenverfahren feste Verhältnisse n_2/n_1 und k_3/k_2 . Diese Restriktionen können wiederum maximale ASN-Werte hervorrufen, die weit oberhalb der Stichprobenumfänge der einfachen Variablenprüfpläne liegen. Ein umfassendes Tabellenwerk für die doppelte Variablenprüfung findet sich u.a. bei SCHILLING⁵⁷. In diesem Buch werden für diverse Eingangsparameter p_1 , p_2 , α , β zweifache Variablenprüfpläne mit bekannter und unbekannter Varianz angegeben. Die dargestellten zweifachen Pläne wurden mit Hilfe eines von SOMMERS⁵⁸ entwickelten Algorithmus berechnet. Bei seinen Berechnungen verwendete SOMMERS stets die Restriktionen $n_1 = n_2$ und $k_3 = k_2$. Im folgenden stellen wir einen kurzen Ausschnitt aus diesem Tafelwerk dar. Zur Vergleichbarkeit mit den ASN-Plänen δ^* haben wir für SOMMERS Variablenprüfpläne $N(p_{\max})$ berechnet⁵⁹. Somit können abschließend einige von SOMMERS Resultaten mit den Ergebnissen, die mit Hilfe des in Kapitel 5.2 veröffentlichten Algorithmus ermittelt wurden, verglichen werden.

⁵⁷ Vgl. Schilling, Edward G. ; Acceptance Sampling In Quality Control ; Marcel Dekker ; 1982 ; Seite 639 ff.

⁵⁸ Vgl. Sommers, D. J. ; Two-Point Double Variables Sampling Plans ; in : Journal of Quality Technology ; 1981 ; 13(1) ; Seiten 25-30.

⁵⁹ Sommers verwendete das Kriterium der Minimierung der ASN beim Ausschußprozensatz p_1 . Vgl. Sommers, D. J. ; Two-Point Double Variables Sampling Plans ; in : Journal of Quality Technology ; 1981 ; 13(1) ; Seiten 25-30.

p_1	p_2	$n_1 = n_2$	k_1	$k_2 = k_3$	p_{\max}	$N(p_{\max})$
0.01	0.02	87	20.61	20.05	0.0146	106.17
0.01	0.03	31	12.03	11.30	0.0181	39.76
0.01	0.04	19	9.20	8.46	0.0214	24.49
0.01	0.05	13	7.54	6.74	0.0239	17.01
0.02	0.03	208	28.70	27.98	0.0247	266.57
0.02	0.04	66	15.84	15.03	0.0287	86.82
0.02	0.05	37	11.62	10.83	0.0325	48.38
0.03	0.04	411	36.90	36.49	0.0351	477.03
0.03	0.05	105	18.65	17.62	0.0384	146.12
0.04	0.06	159	21.18	20.43	0.0495	205.87
0.04	0.07	83	14.94	14.30	0.0542	103.76
0.05	0.07	204	22.85	21.85	0.0588	282.10
0.05	0.08	113	16.37	15.84	0.0649	136.68
0.05	0.09	66	12.51	11.70	0.0681	86.82
0.05	0.1	46	10.31	9.50	0.0721	60.53

Tabelle 3 : Doppelte Variablenprüfpläne nach SCHILLING / SOMMERS

Die von SOMMERS veröffentlichten Tabellen setzen stets $\alpha = 0.05$ und $\beta = 0.1$ voraus. Für $p_1 = 0.04$ und $p_2 = 0.07$ ergibt sich demgemäß

$$\delta_s = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 14.94 & 14.30 \\ 83 & 14.30 & \end{pmatrix}. \text{ Dieser doppelte Variablen-}$$

prüfplan besitzt ein p_{\max} von 0.0542 und einen maximalen durchschnittlichen Stichprobenumfang $N(p_{\max})$ von 103.76. Der approximativ OC-äquivalente einfache Variablenprüfplan lautet $(n, k) = (114, 18.93)$. Es ergibt sich somit eine minimale Stichprobeneinsparung von 8.98 % und eine maximale Stichprobeneinsparung von 27.19 %. Die von SOMMERS berechneten zweifachen Variablenprüfpläne weisen stets einen geringeren durchschnittlichen Prüfumfang auf, als die OC-äquivalenten Einfachpläne. Daher ist die Anwendung dieser Pläne grundsätzlich gegenüber den einfachen Variablenprüfplänen zu empfehlen. Allerdings kann mit Hilfe des in Kapitel 5.2 dargestellten Algorithmus stets ein doppelter Variablenprüfplan mit geringerem maximalen ASN-Wert berechnet werden. Diese Effekte sollen nun an einigen Beispielen demonstriert werden. Für einige Parameterkonstellationen sind in der folgenden Tabelle 4 jeweils der doppelte Variablenprüfplan δ_s von SOMMERS und der δ^* -Plan sowie die zugehörigen maximalen ASN-Werte $N_{\max}(\delta_s)$ bzw. $N_{\max}(\delta^*)$ angegeben. Zum Vergleich ist der OC-äquivalente Einfachplan (n, k) mitangegeben. Die Tabelle verdeutlicht, daß durch den Verzicht auf die Einschränkungen $n_1 = n_2$ und $k_2 = k_3$ die guten Ergebnisse von SOMMERS noch weiter verbessert werden konnten.

p_1	p_2	α	β	Sommers-Plan δ_s	ASN-Plan δ^*	(n, k)
0.01	0.08	0.05	0.10	$\delta_s = \begin{pmatrix} 7 & 5.424 & 4.498 \\ 7 & 4.498 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta_s) = 9.496$	$\delta^* = \begin{pmatrix} 7 & 5.185 & 4.348 \\ 6 & 4.484 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta^*) = 8.945$	(11, 6.007)
0.01	0.03	0.05	0.10	$\delta_s = \begin{pmatrix} 31 & 12.026 & 11.303 \\ 31 & 11.303 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta_s) = 39.760$	$\delta^* = \begin{pmatrix} 30 & 11.806 & 10.879 \\ 23 & 10.042 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta^*) = 38.209$	(44, 13.775)
0.02	0.09	0.05	0.10	$\delta_s = \begin{pmatrix} 12 & 6.305 & 5.439 \\ 12 & 5.439 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta_s) = 16.020$	$\delta^* = \begin{pmatrix} 12 & 6.127 & 5.291 \\ 9 & 5.014 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta^*) = 14.916$	(17, 6.818)
0.01	0.09	0.05	0.10	$\delta_s = \begin{pmatrix} 6 & 5.199 & 4.042 \\ 6 & 4.042 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta_s) = 8.460$	$\delta^* = \begin{pmatrix} 6 & 4.806 & 3.867 \\ 5 & 3.967 \end{pmatrix}$ $N_{\max}(\delta^*) = 7.806$	(9, 5.320)

Tabelle 4 : Vergleich von δ_s und δ^* Variablenprüfplänen

Literaturverzeichnis :

- Bauer , Lothar (1987) :**
Inspektionsfehler in der attributiven Qualitätskontrolle.
Physica Heidelberg.
- Bowker , Albert H. / Goode , Henry P. (1952) :**
Sampling Inspection By Variables.
Stanford University.
- v. Collani , Elart (1984) :**
Optimale Wareneingangskontrolle.
Teubner Stuttgart.
- Deutsche Gesellschaft für Qualität e.V. Ffm. (1973) :**
Stichprobentabellen zur Attributprüfung (nach DIN 40080).
Beuth Berlin.
- Duncan , Acheson J. (1975) :**
Sampling By Variables To Control The Fraction Defective :
Part I.
in : Journal of Quality Technology.
- Enrick , Norbert L. (1961) :**
Qualitätskontrolle im Industriebetrieb.
Oldenbourg München / Wien.
- Guenther , William C. (1970) :**
A Procedure for Finding Double Sampling Plans for Attributes.
in : Journal of Quality Technology.
- Hamaker , H.C. / van Strik, R. (1955) :**
The Efficiency of Double Sampling for Attributes.
in : Journal of the American Statistical Association.
- Juran , J. M. / Gryna , Frank M. (1970) :**
Quality Planning And Analysis.
McGraw-Hill, Inc.
- Kanagawa , A. / Ohta , H. (1997) :**
Determination of Sample Sizes for Double Sampling Attribute
Plans.
in : Frontiers in Statistical Quality Control 5 (Eds.: Lenz; H.J. /
Wilrich, P.-Th.).
Physika Heidelberg.

Krumbholz , Wolf / Pflaumer , Peter (1982) :

Möglichkeiten der Kosteneinsparung bei der Qualitätskontrolle durch Berücksichtigung von unvollständigen Vorinformationen. in : Zeitschrift für Betriebswirtschaft.

Krumbholz , Wolf / Müller, Kai (1997) :

Zweifache Attributprüfpläne mit minimaler maximaler ASN.
in : Discussion Papers in Statistics and Quantitative Economics (No. 78).

Masing , Walter (1980) :

Handbuch der Qualitätssicherung.
Carl Hanser München / Wien.

Mc Kinsey & Company, Inc. (1995) :

Qualität gewinnt : Mit Hochleistungskultur und Kundennutzen an die Weltspitze.
Schäffer-Poeschel Stuttgart.

Military Standard MIL-STD-105 D (1963) :

Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes.
Superintendent of Documents.
US Government Printing Office ; Washington D.C.

Montgomery , Douglas C. :

Introduction to Statistical Quality Control.
Arizona State University.

Müller , Kai (1996) :

Zur Berechnung von zweifachen Attributprüfplänen mit minimalem mittleren Prüfumfang. (Diplomarbeit)
Universität der Bundeswehr Hamburg ; Band Ia , Band Ib und Band II.

Müller-Rossow , K. (1976) :

DIN 55350 : Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik.
in : Qualität und Zuverlässigkeit.

Rinne , Horst / Mittag , Hans-Joachim (1989) :

Statistische Methoden der Qualitätssicherung.
Carl Hanser München / Wien.

Schaafsma , A. H. / Willemze F. G. (1973) :

Moderne Qualitätskontrolle.
Deutsche Philips GmbH Hamburg.

Schilling , Edward G. (1982) :

Acceptance Sampling In Quality Control.
Marcel Dekker.

Schilling, Edward G. (1974) :

Variables sampling and MIL-STD-414.
in : Quality Progress.

Schindowski, Egon / Schürz, Otto (1976) :

Statistische Qualitätskontrolle : Kontrollkarten und Stich-
probenpläne.
VEB Technik Berlin.

Sommers, D.J. (1981) :

Two-Point Double Variables Sampling Plans.
in : Journal of Quality Technology.

Taylor, W.A. (1986) :

A Programm for Selecting Efficient Binomial Double
Sampling Plans. in : Journal of Quality Technology.

Uhlmann, Werner (1982) :

Statistische Qualitätskontrolle.
Teubner Stuttgart.

Verband der Automobilindustrie e.V. (1983) :

Produktaudit bei Automobilherstellern und Zulieferanten.
VDA Frankfurt am Main.

Vogt, H. (1988) :

Methoden der Statistischen Qualitätskontrolle.
Teubner Stuttgart.

Welti, Otto (1965) :

Inspektion und Qualitätskontrolle.
Moderne Industrie.

Lebenslauf :

Name : Kai Müller

Geboren : 15.06.1971 in Hildesheim

8 / 1977 - 7 / 1981 **Grundschule in Rheine**

8 / 1981 - 6 / 1990 **Besuch des Kopernikus-Gymnasiums
in Rheine
Abschluß : Allgemeine Hochschulreife**

10 / 1993 - 3 / 1997 **Studium an der Universität der
Bundeswehr Hamburg
Abschluß : Diplom-Kaufmann**